Primjena diferencijalnog i integralnog računa u području primijenjenih tehničkih znanosti

Marković, Antonio

Istarsko veleučilište –

Università Istriana di scienze applicate

ANTONIO MARKOVIĆ

PRIMJENA DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA U PODRUČJU PRIMJENJENIH TEHNIČKIH ZNANOSTI

Završni rad

Pula, 22.rujan 2020.

Istarsko veleučilište –

Università Istriana di scienze applicate

ANTONIO MARKOVIĆ

PRIMJENA DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA U PODRUČJU PRIMJENJENIH TEHNIČKIH ZNANOSTI

Završni rad

JMBAG: 1709993360018

Studijski smjer: Preddiplomski stručni studiji politehnike

Kolegiji: Završni rad sa obranom

Mentor: Đani Žufić

Pula,22. rujan 2020.

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Ja, dolje potpisani Antonio Marković, kandidat za prvostupnika politehnike, ovime izjavljujem da je ovaj Završni rad rezultat isključivo mojega vlastitog rada, da se temelji na mojim istraživanjima te da se oslanja na objavljenu literaturu kao što to pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da niti jedan dio Završnog rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz kojega necitiranog rada, te da ikoji dio rada krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za koji drugi rad pri bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili radnoj ustanovi.

U Puli, 29.07.2020. godine

Student:

Marković

IZJAVA

o korištenju autorskog djela

Ja, Antonio Marković dajem odobrenje Istarskom veleučilištu – Università Istriana di scienze applicate, kao nositelju prava iskorištavanja, da moj završni rad pod nazivom „**Primjena diferencijalnog i integralnog računa u području primijenjenih tehničkih znanosti** koristi na način da gore navedeno autorsko djelo, kao cjeloviti tekst trajno objavi u javnoj internetskoj bazi Sveučilišne knjižnice u Puli te kopira u javnu internetsku bazu završnih radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice (stavljanje na raspolaganje javnosti), sve u skladu s Zakonom o autorskom pravu i drugim srodnim pravima i dobrom akademskom praksom, a radi promicanja otvorenoga, slobodnoga pristupa znanstvenim informacijama.

Za korištenje autorskog djela na gore navedeni način ne potražujem naknadu.

U Puli, 29.07.2020. godine

Student:

Marković

Sadržaj

1. UVOD

Pojam matematičke analize je grana matematike koja se koristi za neku ideju granične vrijednosti. Izraz matematička analiza dolazi od starogrčke riječi anàlaysis što u prijevodu znači rješenje. Pod samim pojmom matematička analiza je širok pojam i široka grana u matematici. Matematičku analizu podijelili smo na dva djela, a to su diferencijalni i integralni račun. Kroz ova dva pojma u prošlosti poznati filozofi su u ova dva pojma još uključili i analitičku funkciju. Analitička funkcija nam predstavlja snažan poticaj razvoju druge metode a to je metoda grafičkog predočavanja, te razvoj funkcije koja će nam pokazati integralni i diferencijalni račun tablično ili grafom. Tvorci integralnog i diferencijalnog računa su Isaac Newton i Gotfried Wilhelm Leibniz, naravno ova dva pisca se razlikuju jer su jedan i drugi razmišljali na drukčiji način i došli do različitih ideja koje su pridonijele uspjehu matematičke analize pa tako i računa. Isaac Newton je engleski fizičar, matematičar te astronom, te je jedan od najznačajnijih znanstvenika u povijesti. Newton je promatrao matematiku samo kao način za fizikalna istraživanja. Koristio je i izmislio pojmove fluksija. Isto tako je otkrio i obratni karakter operacija diferenciranja i integriranja, te je na samom kraju i razradio metodu istraživanja funkcija primjenom beskonačnih matematičkih nizova. Gottfried Wilhelm Leibniz bio je njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat. Ovaj vrlo značajan znanstvenik do otkrića dolazi preko geometrijskih razmatranja (tangenta). Imao je apstraktan pristup, te je takvim načinom razmišljanja otkrio nove pojmove kao što su karakterističan trokut te diferencijali. Isto tako uvodi i nove matematičke pojmove koji se i danas koriste a to su: funkcija, varijabla, konstanta, diferencijalni račun, koordinata na x i y os te matematičke oznake. Ova dva znanstvenika pridonijeli su razvoju matematike kako u srednjim školama tako i na visokim učilištima.

2. NEWTONOVE „ZLATNE GODINE“

Isaac Newton pod prisilom je živio u osami kod kuće izoliran od svih. Takav način života doveo ga je do razmišljanja i mogućih budućih postignuća. Istinski se zanimao za fiziku, matematiku i astronomiju. Prve dvije „zlatne godine“ vezane su za Woolsthorp, ovaj idealizirani znanstvenik imao je tri otkrića, te je svako otkriće bilo izvanredno. Za prvi izum uzimamo pojam matematičke metode kojoj je I. Newton dao ime fluksija, danas poznata kao diferencijalni račun. Drugi izum je bila analiza bijele svjetlosti (sunca) u svjetlu različitih boja. Treće otkriće je bila koncepcija zakona univerzalne gravitacije. Sva tri otkrića nastala su za života u dobi od 25 godina. Nakon što je ovaj vrhunski matematičar i optičar napunio 25 godina povukao se iz znanstvenog svijeta i posvetio isključivo matematici. Otkriva opći binom teorema, odnosno proširenje koje je danas poznato kao $(a+b)^n$, gdje nepoznati broj n može biti definiran kao djelomični ili negativni eksponent. Isto tako je prvi izrazio formulu te dao ideju koja ga je dovela do toga. Za svoga života pisao je pisma koja su prevedena na latinski i bila proslijeđena Leibnizu, koji je bio u svojoj ranoj borbi sa svojom idejom i verzijom infinitezimalnog računa te pitao za informacije o Newtonovom radu na beskonačnim nizovima.

2.1 NEWTONOVA PISMA

U prvom pismu što je Isaac Newton poslao, zvano Oldenburg, bila je formula, odnosno pravilo, kako ga je Newton nazvao, bio napisan u obliku:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + ...$$

u kojem svaki od A, B, C i D označava pojam koji neposredno prethodi, to jest, A predstavlja P što je dijeljeno sa m kroz n, dok B predstavlja m dijeljeno sa n pomnoženo sa nepoznanicama A i Q te tako u beskonačnost. U Newtonovom pismo obično se javljaju i upotrebljavaju negativni i djelomični eksponenti, koji su nakon tog vremena postali opće priznata praksa.

Nakon napisanog i sastavljenog matematičkog pisma, Wallis je ranije napravio tablice onog što bi mi danas pisali sa nepoznanicom f na nultu za neki određeni pozitivni cijeli broj n, ali mu je u tom trenutku procjena od f nula izmakla. Ipak, za izrazito razrađenu i tešku analizu, došao je izvanredni izraz koji je dijelio π na 4 djela u obliku beskonačnog niza:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx}{1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$$

Newton je uvidio da promjenom Wallisove gornje granice u integralu za varijablu x (nije imao znak za integral, ali je definirao integral kao granicu niza suma), a zatim tražio opći uzrok. Obzirom na proširenje moderni ekvivalenti su:

$$\int_0^x (1-t^2) dt = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\int_0^x (1-t^2)^2 dt = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$\int_0^x (1-t^2)^3 dt = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$$\int_0^x (1-t^2)^4 dt = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

Newton je primijetio da prvi član svakog izraza je x, a taj x se povećava neparno, te da se algebarski znakovi članova izmjenjuju, ali u drugom smislu oni su zapravo u aritmetičkom rastu, te je smatrao kako bi prva dva člana trebala biti zapisana u sljedećem izrazu:

$$x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$$

Takvim načinom razmišljanja I. Newton došao je do nekih novih spoznaja i zaključio kako bi zapravo zapis trebao biti na ovakav način:

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{5}{128}}{9}x^9 - \ldots$$

Brojnici koji su dijeljeni sa nazivnicima su vezani za prirodni broj n i oni imaju konkretan slučaj kad je prirodan broj n dijeljeni sa primjerom jedne polovine u općoj formuli koja glasi:

$$\int_0^x (1-t^2)^n dt = x - \binom{n}{1}\frac{1}{3}x^3 + \binom{n}{2}\frac{1}{5}x^5 - \binom{n}{3}\frac{1}{7}x^7 + \binom{n}{4}\frac{1}{9}x^9 - \dots$$

gdje je

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

U drugom smislu ovaj mislilac i znanstvenik I. Newton zaključio je da je binomni koeficijent tog oblika namijenjen za ne integralne vrijednost, te se posebno koristi koeficijentom:

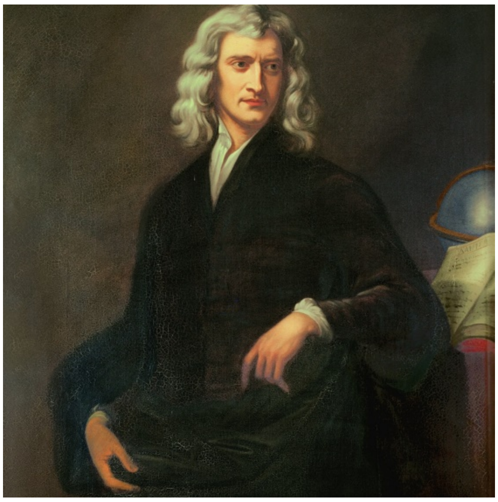
$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots-(k-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

Iz ovakve formule razmišljanje ga je potaknulo na drukčiji zapis izraza (deriviranja) koje bi bilo na slijedeći način:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots ,$$

nakon ovakvog zapisa provjerio je ispravnost množenjem prethodnih nizova samim sobom, član po član, kako bi dobio rezultat $1-x^2$

Isto tako čudna nam je sama činjenica je Newton izveo binomno proširenje u integralnom obliku, u kojem je koristio f na nulti eksponent, prije nego je shvatio da je isti oblik sačuvan u prethodnom obliku koji glasi $(1-x^2)^{1/2}$, u kojem su se kao nazivnici isključivo koristili brojevi 1, 3, 5, 7 i 9…na takav način je izostavio i svaki eksponent te ga smanjio za 1. Za svoga života ovaj matematičar i fizičar nikad nije objavio svoji binomni teorem niti ga je dokazao u potpunosti. Sam binomni teorem je postao popularan i poznat preko privatnih i drugih krugova, ali se to naravno nije uzimalo u obzir sve dok nije izašlo u tiskanom izdanju 1685. godine.



Slika 1. Isaac Newton (1642.-1727.)

3. RAZVOJ NEWTONOVE METODE FLUKSIJA

Newton je za vrijeme svoga života otkrio i ekvivalentan pristup, koji je bio geometrijski orijentiran. U to vrijeme javile su se sumnje Leibniza iz razloga što on nije bio siguran u takve tvrdnje koje su bile nedostižne. Takav razvoj pojavio se 1665.-1666. godine, kad je u dvadesetoj godini I.Newton otkrio binomni teorem. Djelo koje je napisao Newton nikad nije dao određeni naslov, ali u literaturi je poznat kao „Trakt“, nastao je u listopadu 1666. godine. Tražeći uzorak tabličnih vrijednosti od f_0^x (1 + t $)^{-1}$ dt, on je pokazao da je površina pravokutne hiperbole (x +1)y=1 glasi na sljedeći način:

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

takav matematički zapis je razvoj za prirodni logaritam od 1+x. Za vrijeme matematičkih stvaranja, I. Newton je pokazao novu sposobnost za izračunavanjem takvog zapisa, za određene vrijednosti x, za poprilično veliki broj decimalnih mjesta (68 decimalnih mjesta, koristeći eksponencijalni zapis u obliku x^{25}). Sredinom 1669. godine nalazi knjigu poznatog matematičara N. Mercatora kojoj je naziv bio Logarithmotechnia. Prva dva dijela iz te knjige su posvećena tablici za jednakih logaritamskih funkcija, dok je treća cjelina sadržavala razne formule za aproksimaciju logaritama, od kojih je jedan Newtonov za redukciju log(1 + x) na beskonačni red

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

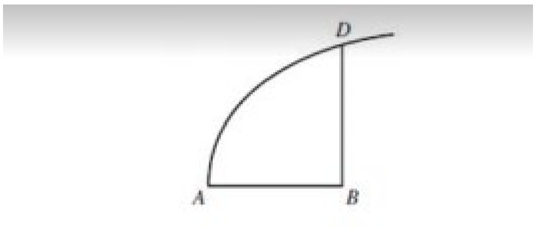
U jednom trenutku Isaac Newton se osjećao potišteno i razočarano, jer je smatrao kako ga je Merator pretekao u publiciranju. Iz toga je razloga Newton počeo užurbano radit na pisanju svojih ranijih istraživanja o proširenim nizovima. Rezultat istraženog i napisanog bio je predan Issacu Barrowu. Do ljeta, iste te godine, Barrow je svoje oduševljenje o nizovima prenio matematičaru Johnu Collinsu, te je izrekao slijedeću rečenicu: „Moj prijatelj je izvrstan genije za te stvari, neki dan mi je donio svoje radove, gdje je postavio metodu izračunavanja dimenzija za veličine poput one od gospodina Mercatora koje se odnose na hiperbolu, ali na opširniji način.“ Radove koje je napisao Newton postali su dio analiza jednadžbi na neograničen broj.

3.1 PRAVILA ANALIZA JEDNADŽBI (DE ANALYSI)

De Analysi počinje pravilom, bez dokaza, za računanje površine ispod krivulje y= $ax^{m/n}$:

„Za bazu AB neke krivulje AD, neka ordinata BD bude okomita i neka se AB zove x i BD y. Neka a, b, c,… budu zadane veličine i m, n cijeli brojevi. Tada imamo:

Pravilo 1. Ako $ax^{m/n}$=y, tada je n dijeljen sa brojnikom m + n te dijeljen sa (m + n):n= površina ABD



Slika 2. Pravilo 1.

Budući da je x koordinata od A nula, Newton je točno procjenio integral f_0 $at^{m/n}$ dt. Kasnije u analizi, razradio je dokaze za pravilo 1., te je pretpostavljao da je imao krivulju i da je površina ispod krivulje prikazana na sljedeći način: (1.1)

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{(m+n)/n}$$

Ako je 0 beskonačno povećanje za x, tada će nova apscisa biti x + 0, a povećanje u površini (područje koje je omeđeno krivuljom, x-osi i ordinatom na x + 0) će biti prikazano na sljedeći način: (1.2)

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+n}\right) a(x+o)^{(m+n)/n}$$

u ovakvom zapisu oy je povećanje po kojem se naravno povećava i površina. Newton je tada primijetio binomnom proširenje na desnoj strani jednadžbe, kad je oduzimao (1.1) od (1.2), te ih podijelio sa o, i odbacio uvjet koji još uvijek sadrže o, i došao do novog rezultata a samim time i nove jednadžbe:

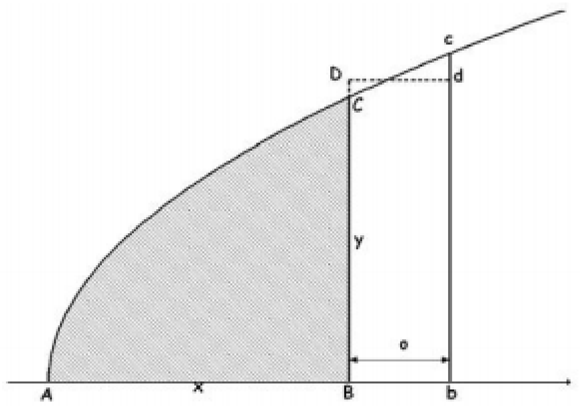
$$y = ax^{m/n}.$$

isto tako je to je izrekao i obrnuto, ako krivulja gdje je y= $ax^{m/n}$, površina ispod nje će biti sljedeća:

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{(m+n)/n}.$$

Newtonu se to činilo da je shvatio odnose između diferencijacije i integracije, te je nejasno to i tvrdio. Nije bilo objašnjeno kada se potencije od o mogu zanemariti u izračunu.

Nedugo nakon Barrow će uvjeriti Newton da dopusti Collinsu uvid u jednadžbu analiza koju je sastavio sam I. Newton. U tom trenutku Collins će napraviti kopije te će to podijeliti svojim poznatim prijateljima matematičarima, prije nego što će originalno stvaranje vratiti onome kome pripada. Prolazile su godine i Newton je odlučio pokušati srediti tiskanje tog važnog rada, ali to mu nije pošlo za rukom, jer su knjižničari smatrali da je tržište malo i nedostižno za ozbiljna matematička izdanja. Prvi put se pojavljuje 65 godina kasnije. Radilo se o određivanju brzine iz puta i obrnuto, a najveća Newtonova zasluga je to što je uočio međusobnu povezanost tih dviju operacija. Newton je zamišljao česticu koja se giba po krivulji u pravokutnom koordinatnom sustavu, a njene brzine (x horizontalno i y vertikalno) naziva fluksijama tekućih veličina (fluensa) x i y, pridruženih fluentnu ili toku vremena. Smatrao je ukoliko je putanja opisana krivuljom f (x, y) = 0, onda je y koji dijeli x koeficijent smjera tangente na tu putanju. Za određivanje brzine Newton je koristio Barrowovu ideju o tangenti kao limesu sekanti. Glavni problem se javljao kod određivanja ordinate na y os iz poznate veze između apscise na x os i omjera vertikalne i horizontalne brzine. No ovaj vrhunski matematičar problem je riješio izrazito brzo, koristio je razvoj funkcija u redove potencija, te je uz pomoć deriviranja otkrio i antideriviranje (neodređen integral i međusobna inertnosti). Isto tako uočio je da se antideriviranjem mogu odrediti površine te da su problemi površine, volumena i duljine luka istovrsni. Vezu između fluksija i kvadrature pokazao je u prilogu svog djela o optici i 1704. godine.



Slika 3. Računanje derivacije Newtonom metodom

4. DERIVACIJE NEWTONOVOM METODOM

Isaac Newton svoje je oznake dosta mijenjao, ali najčešće su x za dx/dt, x za antiderivaciju od x, o za dt i xo za dx (takve oznake koristi u tekstovima još iz 1692. godine). Newtonovo objašnjenje općeg postupka za nalaženje odnosa između površine ispod krivulje i njene ordinate (veza između integrala i derivacija) možemo opisati na slijedećem primjeru. Pretpostavit ćemo da se radi od krivulji u (x, y)- ravnini i neka je označena sa malim slovo z, slovo z nam simbolizira površinu označene krivulje (nalazi se iznad x i prolazi kroz ishodište) u nekim granicama od x=0 do x. Neka je z kvadrirano i neka nam daje jednakost $\frac{4}{9}x^3$. Pomaknemo li desnu granicu za mali iznos o, površina se povećava i postoji pravokutnik sa bazom o = apsolutno od Bb i visinom v= apsolutno od bd čija je površina jednaka povećanju površine (slika 3).

Tada je:

$$(z+ov)^2 = \frac{4}{9}(x+o)^3$$

iz čega slijedi:

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

Ako je o „beskonačno mali“, onda je visina približna y, pa je 2 zy približan $\frac{4}{3}x^2$ odnosno y je približno korijenu od x. Iz samog postupka je vidljivo da se radi o računanju derivacije z po varijabli x, a zaključujemo i vidimo inertnost integriranja i deriviranja. Ovakvim je načinom Newton analizirao niz krivulja i tako dobio prvu tablicu integrala.

4.1 MALI PRIRAST O VARIJABLI X I PRIRAST POVRŠINI Z

Ovakvu metodu Newton je koristio u diskusijama ekstrema, tangenti i zakrivljenosti krivulja. U kasnijim radovima preformulirao je svoje argumente u terminima fluentan i fluksija. Omjer fluksija (koeficijent smjera tangente na krivulju), nalazi na sličan način. Tako primjerice za krivulju : $x^3 – ax^2 +axy – y^2 = 0$

promjena x u x ili ox i y u y + oy daje

$$(x^3-ax^2+axy-y^3)+o(3x^2\dot{x}+3xo\dot{x}^2+o^2\dot{x}^3-2ax\dot{x}-ao\dot{x}^2+ax\dot{y}+ay\dot{x}+ao\dot{x}\dot{y}-3y^2\dot{y}-3yo\dot{y}^2-o^2\dot{y}^3)=0.$$

ako uzmemo u obzir jednadžbu krivulje slijedi:

$$o(3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3y^2\dot{y}+3xo\dot{x}^2+o^2\dot{x}^3-ao\dot{x}^2+ao\dot{x}\dot{y}-3yo\dot{y}^2-o^2\dot{y}^3)=0,$$

iz čega ćemo dijeljenjem o sa 0 dobiti slijedeće rješenje:

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3y^2\dot{y}+3xo\dot{x}^2+o^2\dot{x}^3-ao\dot{x}^2+ao\dot{x}\dot{y}-3yo\dot{y}^2-o^2\dot{y}^3)=0.$$

ako zanemarimo članove sa o jer su vrlo mali dobivamo novo rješenje:

$$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2=0$$

te je :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3x^2-2ax+ay}{3y^2-ax}.$$

U ovakvim zapisima Newtonovi suvremenici su primijetili nedostatak takvog načina pristupanja. Dodaju se prirasti koji su skoro nula, ali nisu nula, i tokom istog računa nekad se tretiraju kao brojevi koji nisu nula (samo u slučaju kad dijelimo sa njima), a nekad kao nula (kad neke članove s njima zanemarujemo). Jedan od najpoznatijih kritičara infinitezimalnih veličina kako ih je predstavio sami Newton bio je biskup George Berkeley, koji je postavio niz pitanja vezanih za logičku opravdanost Newtonovog pristupa. Temeljem takvih pitanja nastavak razvoja teorije derivacija i integrala bit će usmjerena na opravdanje rezultata koji očigledno normalno funkcioniraju. To će biti postignuto početkom 19. stoljeća, kad su egzaktno definirani limesi.

4. GOTTFRIED LEIBNIZ: INFINITEZIMALNI RAČUN

Glavni izum 17. stoljeća bio je infinitezimalni račun. Prema rijetkoj slučajnosti matematičke povijesti dvojica matematičara došli su do ideje i to u istom trenutku. Newtonove metode infinitezimalnog računa u Engleskoj i Leibnizovog na kontinentu bile su toliko slične da se postavilo pitanje je li Leibniz posudio Newtonove ključne koncepte ili ih je istražio samostalno, što je razvilo velike i užasnute rasprave. Glavni razgovori i rasprave vodili su se oko glavnih protagonista koje su bile iznimno štetne, pa je sve nasilje kroz štetne optužbe i protuoptužbe utjecalo na to da niti jedan od njih nije uspio sačuvati ugled neuništiva izgleda. Kad su se plagijati počeli javno kažnjavati, odbor Kraljevskog Društva pozvao je na rješavanje najzamornijeg spora. Riješen je, nimalo iznenađujuće, u korist društvenog predsjednika Newtona.

Slika 4. G.W. Leibniz (1646. – 1716.)

G. W. Leibniz rođen je u sveučilišnom gradu Leipzigu oko dvije godine prije Vestfalskog mira. Otac mu umire u šestoj godini njegove životne dobi. Nakon smrti njegova oca, okreće se istraživanju i svijetu knjiga. Kao dječak počeo je pokazivati izuzetne lingvističke sposobnosti, u svojoj dvadesetoj godini izuzetno dobro vlada latinskim jezikom tako da piše stihove. Nakon latinskog jezika naučio je i starogrčki te je mogao u originalu čitati klasike, naročito od Aristotela. Znao je i francuski jezik koji je bio treći jezik na kome je objavljivao svoje rasprave. Leibniz nije samo naučio latinski i grčki, već je potpuno na svoju inicijativu kao dječak slušao predavanja poznatog retoričara i povjesničara filozofije Jackoba Tomazija.

5.1 SUMA RECIPROČNIH TROKUTASTIH BROJEVA

Na jesen 1661. godine Leibniz je postao student na Sveučilištu u svom rodnom gradu, Leipzigu. Sa svojih 15 godina mnogi su ga smatrali čudom od djeteta, ali nedugo nakon je nadmašio i svoje suvremenike. Sa svojih jedva 17 godina je diplomirao u Leipzigu, 1663. godine, nakon što je obranio tezu o filozofiji. Nakon diplomiranja, odslušao je ljetni semestar na Sveučilištu u Jeni, gdje je pohađao satove matematike, te se vratio u Leipzig i posvetio daljnjem studiju prava, i stekao stupanj magistra već sljedeće godine. Nakon školovanja, Leibniz dobiva mjesto predavača na Filozofskom fakultetu u Leipzigu. Intenzivno će početi razvijati teoriju permutacije i kombinacije u svrhu izrade logičkog zaključivanja. Isto tako predložio je da se osmisli račun koji bi dao metodu automatskog rješenja za sve probleme koji bi se pojavili u stručnom jeziku tog računa. Odlaskom u Pariz, Leibniz stupa u mnoga nova poznanstva sa novim znanstvenicima. Najvažniji znanstvenik bio je Nizozemac Christiaan Huygens, koji je živio u Parizu od 1666. pa sve do 1681. godine. Kad je Newton otišao na Cambridge, on je studirao pod vodstvom Isaaca Barrowa, jednog od najistaknutijih matematičara tog razdoblja, ali matematičko znanja koje je Leibniz dobio u Leipzigu bilo je daleko od odgovarajućeg. Tijekom ranijih sastanka između Leibniza i Huygensa, Leibniz je tvrdio da on može naći sumu bilo kojih beskonačnih nizova čiji su uvjeti formirani od strane nekih pravila (niz mora konvergirati), Christiaan Huygens je želio testirati Leibniza, te mu predloži da pokuša odrediti sumu recipročnih trokutastih brojeva:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots$$

Pojednostavio je izraz, i upotrijebio druga dva koristeći:

$$\frac{2}{n(n+1)}=2\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$$

U tom trenutku Leibniz nije mogao dobiti sumu koju je Huygens zahtijevao. Za

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=$$
$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots=$$
$$2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=2$$

U nekoliko navrata Leibiz je rekao da ga je do izuma infinitezimalnog računa dovelo više proučavanje Pascalovih spisa nego bilo što drugo. Ovih nekoliko godina u Parizu bile su kreativno razdoblje Leibnizova života, tijekom kojih se rastao od početnika do zrelog matematičara. Leibniz je bio u mogućnosti priznati da se proslavio alternativnim nizom koji nosi njegovo ime,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$$

Iz ovog niza, Leibniz je našao formulu 1673. godine, ali formula je bila poznata i mladom škotskom matematičaru Jamesu Gregoryu (1638. – 1675.). To je elegantna formula za n, ali niz konvergira presporo za računalne potrebe. Newton je istaknuo to, te je poslao Leibnizu (preko Oldenburga) varijantu tog izraza:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\dots$$

6. LEBNIZOVO STVARANJE INFINITEZIMALNOG RAČUNA

Leibniz svoji procvat u matematičko genija doživio je za vrijeme boravka u Parizu od 1672. do 1676. godine. Ovo razdoblje kreativnosti podsjeća na Newtona u njegovim „zlatnim godinama“. Za to vrijeme on je razvio glavne značajke i obilježja svoje verzije infinitezimalnog računa. Izumio je razne metode za određivanje tangente na određene vrste krivulja, ali još nitko nije napravio poznati slični postupak za rješavanje invertnog problema, to jest, nastajanje jednadžbe krivulje iz svojstva tangenti. Leibniz je naveo slijedeći citat za invertni tangentni problem: „da biste pronašli mjesto funkcije, odredite geometrijsko mjesto točaka funkcije, ako je poznato geometrijsko mjesto pod tangente.“ Do sredine 1673. godine, on se bazirao na istraživanju ovog problema, potpunosti priznajući da je „gotovo cijela teorija invertne metode tangenti svesti ju na kvadraturu, tj. integracije.“

Leibiz se u međuvremenu i dalje borio s notacijom na njegov račun, tako da nije ni čudno što su ti rani izračuni bili nespretni. Dobivene rezultate izrazio je u retoričkom obliku ili je koristio kratice, kao što su „omn“ što na latinskom znači Omnia (zbroj). Slovo l bilo je korišteno kao simbol onog što bismo trebali pisati kao dy, „razlika dvije susjedne koordinate“. U rukopisu od 29. listopada 1675. godine, koji nikad nije objavljen, Leibniz je napravio simboličko povezivanje izravnog i invertnog problema tangente. U tom eseju Leibniz je pisao o teoremu koji je dobio geometrijskim razmatranjem:

Imamo teorem koji mi se čini divan, i jednom će biti od velike pomoći i koristi za taj novi račun, naime,

Za bilo koji l $$\frac{\overline{omn.l^2}}{2} = omn.\overline{\overline{omn.l}\frac{l}{a}}$$

Horizontalne povlake su korištene umjesto naših normalnih zagrada, a konstanta a (što je označavalo dx) ovdje je jednaka 1. Leibniz je napomenuo: „Ovo je vrlo dobar teorem, i jedan koji nimalo nije očigledan“. Odmah poslije toga, naveo je još jedan teorem iste vrste:

$$omn.\,xl = x\,omn.\,l - omn.\,omn.\,l$$

Ta jednadžba bila je od povijesne važnosti, jer je ovdje Leibniz prvi put uveo simbol izduženog slova s za „sumu“. U sredini eseja, rekao je: „Bit će korisno pisati takav simbol za omn. pa je tako izduženi simbol slova s postala suma svih brojeva.

$$\frac{\int \bar{l}^2}{2} = \int \int \bar{l} \frac{l}{a} \qquad i \qquad \int \overline{xl} = x \int \bar{l} - \int \int l$$

U našoj notaciji infinitezimalnog računa, on je pokazao da je

$$\frac{1}{2}\Big(\int dy\Big)^2 = \int \Big(\int dy\Big) dy \qquad i \qquad \int x dy = xy - \int y dx$$

Leibniz još nije počeo koristiti diferencijale u znaku integrala, ali postoji još jedan rukopis, napisan nekoliko tjedana nakon prethodnog eseja, u kojem je popravio svoju notaciju za pisanje sume, ta notacija je izravni potomak motrenog oblika integrala. Kasnije, u istom rukopisu 29. listopada, Leibniz je istraživao suprotnosti infinitezimalnog račun, te opaža dvojnu prirodu procesa integracije i derivacije:

Za dani l, i njegovu relaciju prema x, pronaći integral l. To je sadržano u dvojnosti računa, to jest pretpostavimo da je suma jednaka ya. Neka je l = ya/d, i kako će se povećati suma, dok će d smanjivati dimenzije.

Simbol d koji je Leibniz prvotno stavio u nazivnik, vjerojatno zbog analogije procesa dijeljenja, u radu napisanom 1. studenog, 3 dana kasnije, zamijenio je y/d poznatim kao dy, koji se tada činio više primjerenim te ga je zadržao u svim svojim kasnijim i budućim radovima.

6.1 ALGORITMI INFINITEZIMALNOG RAČUNA

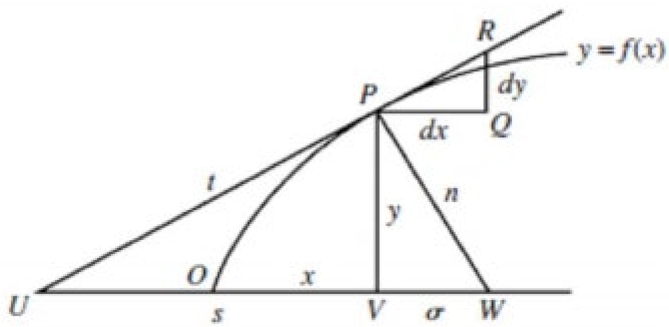
Leibniz je kasnije istraživao osnovne algoritme infinitezimalnog računa. Posebno gdje je d(xy) jednak dx dy i gdje je d(x/y) jednak dx/dy. U rukopisu od 11. studenog, on je zaključio da izrazi nisu isti, iako nije mogao dati točnu vrijednost za svaku od njih. Deset dana kasnije, točno je odredio pravilo produkta i u srpnju 1677. godine dao pravilo kvocijenta. U slučaju produkta Leibniz je oduzeo xy od (x + dx)(y + dy) i odbacio pojam dx dy a napomenom da je „izostavljanjem veličina dx dy, koja je beskrajno malena u usporedbi s ostatkom, jer se pretpostavlja da dx i dy da su beskonačno mali, ostavit će x dy+y dx“. Sve to naravno, bez dokaza. Da bi pronašao diferencijal kvocijenta z=x/y, Leibniz je stavio x= zy i koristio pravilo produkta: dx= z dy+y dz što dovodi do

$$dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{dx - (x/y)dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

6.2 PRAVILO ZA INTEGRALNE I NEPOTPUNE VRIJEDNOSTI

Do studenog 1676. godine, također je bio u stanju izreći pravilo $d(x^n)= nx^{n-1}\,dx$, takav oblik jednadžbe koristio se za integralne i nepotpune vrijednosti od n. Sam Leibniz je istragu o infinitezimalnom računu temeljio na nečemu što je on nazivao „karakterističan trokut“. Takav naziv koristio je i Isaac Barrow za karakterističan trokut u Engleskoj, ali prema Leibnizovom vlastitim navođenju, inspiracija za korištenje je došla iz čitanja Pascalovih radova. Za krivulje koje su bile definirane kao y= f(x), karakterističan trokut je bio pravokutan trokut čije su stranice PQ, QR I PR, dio tangente na krivulji u točki P. Isto tako Leibniz je napomenuo da karakterističan trokut je sličan onom trokutu sa oznakama PVW kojeg čini normala n, su normala σ, i ordinata y na mjestu dodira, ali je također sličan trokutu PVU kojeg čine tangenta t, su tangenta s i ordinata y. Iz sličnosti trokuta i karakterističnog trokuta PVW dobiva:

$$\frac{dy}{\sigma} = \frac{dx}{y} \qquad ili \qquad \sigma dx = ydy$$



Slika 5. Karakterističan trokut

Što se tiče dx i dy kao beskrajno malih veličina te njihovim zbrajanjem, Leibniz je došao do slijedećeg rezultata:

$$\int \sigma dx = \int y\, dy$$

Kako bi riješio novonastali problem (11. studenog), pretpostavio je da subnormala treba biti obrnuto proporcionalna ordinata, to je $\sigma = a^2/y$ i dobio je $y^3/3 = a^2x$ te je krivulja sa danim svojstvom kubna parabola.

Za drugu primjenu, Leibniz je koristio činjenicu kako ja karakterističan trokut vrlo mali, a tetiva PR se može smatrati iste duljine kao i duljina ds krivulje. Budući da je karakterističan trokut sličan trokutu PVW.

$$\frac{n}{ds} = \frac{y}{dx} \qquad ili \qquad y\, ds = n\, dx$$

Zbrajanjem je došo do novog rezultata,

$$\int y\, ds = \int n\, dx$$

Formulu za plohu koja nastaje rotacijom početne krivulje oko x-osi. U ovakvom zapisu i rukopisu sa određenim simbolima za sumu i krivulje na x i y os, izgrađen je Leibnizov infinitezimalni račun. Nedugo nakon je postupno razradio svoji diferencijalni i integralni račun, ali ga nikad zapravo nije zasnova na pojmu limesa. Njegov diferencijal omjera dy/dx se uvijek smatrao kao kvocijent „razlike“, a njegov sastavni integral jednostavno kao zbroj. Prvi matematičar koji je tvrdio i sugerirao da je teorija limesa temelj infinitezimalnom računu bio je Jean d Alembert. Napisao je većinu matematičkih članaka i u jednom tvrdio da diferencijacija jednadžbi sastoji se u pronalaženju limesa omjera kojeg čine konačne razlike dviju varijabli u jednadžbi. Drugim riječima, on je došao do izraza derivacije kao limesa kvocijenta prirasta ili kako bismo drukčije napisali:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No, ovakvom zapisu nedostajalo je preciznosti kako bi se stvorio zapravo limes.

7. DIFERENCIJALNI RAČUN (U DANAŠNJE DOBA)

Diferencijalni račun je nastao iz potrebe da se riješe neki problemi kao što je problem tangente na krivulju koji datira još od doba starih Grka, problem maksimalne i minimalne vrijednosti funkcije, fizikalni problem brzine materijalne točke itd. Ovaj račun se razvija i formalizira tek od druge polovice 17. st, a njegovo otkriće pripisuje Isaac Newton i Gottfried Leibnizu.

7.1 DERIVACIJA FUNKCIJE

Definicija br. 1 : Neka je f : (a,b) R funkcija. Kažemo da je funkcija f diferencijalna u točki x od 0 (a,b), što nam daje slijedeći zapis:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \qquad (2.1)$$

Pri tome funkciju $(X\text{-}X_0) = a(X\text{-}X_0)$ zovemo diferencijal funkcije f u točki X_0, a funkciju $l(X)= f(X_0)+a(X\text{-}X_0)$ zovemo linearni aproksimant od f u okolini točke X_0. Realni broj a iz definicije 1. postoji onda i samo onda ako postoji limes

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pri tome takav a je jedinstven i vrijedi:

$$\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}. \qquad (2.2)$$

Definicija br. 2 : Ako je funkcija f : (a, b) = R diferencijalna u točki X_0 (a, b), onda jednoznačno određeni realni broj a za koji vrijedi (definicija 1.) zovemo derivacija funkcije u točki X_0 i označavamo s f crtano X od nula. To radimo na slijedeći način:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}. \qquad (2.3)$$

Za funkciju f diferencijalnu u točki X_0 kažemo još da je derivativna u točki X_0.

7.2 PRAVILA DERIVIRANJA

Računanje derivacije funkcija prema formuli (2.3) je nepraktično i teško. Ovdje ćemo navest derivacije osnovnih elementarnih funkcija i pravila deriviranja pomoću kojih se lako može izračunati derivacija bilo koje elementarne funkcije. Tehnika deriviranja sastoji se u tome da se na pravilan način primjene pravila deriviranja osnovnih elementarnih funkcija.

DERIVACIJA OPĆE POTENCIJE

Funkcija f : X = X^a, a ∈ R, derivabilna je u svakoj točki svoje domene i pri tome je:

$$x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

DERIVACIJA LOGARITAMSKE FUNKCIJE

Neka je a manje od 0. Logaritamska funkcija X= $\log_a$ X je derivativna u svakoj točki X od elementa R, te pri tome vrijedi:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Specijalno, za derivaciju prirodne logaritamske funkcije (a = e) dobivamo:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

DERIVACIJE EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Eksponencijalna funkcija X = a^x, u kojoj je a manje od 0 jer derivativna u svakoj točki od X elementa R i vrijedi:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Specijalno, za derivaciju prirodne eksponencijalne funkcije dobivamo:

$$(e^x)' = e^x.$$

DERIVACIJE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Trigonometrijske funkcije x → sin x i x → cos x su derivativne u svakoj točki X elementa od R, te pri tome vrijedi:

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

DERIVACIJE ZBROJA I RAZLIKE

Neka su f, g : I = R derivativne funkcije u točki X elementa od I. Tada vrijedi:

a) zbroj f + g je derivativna funkcija u točki X i pri tome vrijedi:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

b) razlika f – g je derivativna funkcija u točki X i pri tome vrijedi:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

DERIVACIJA PRODUKTA

Neka su f, g : I = R derivativne funkcije u točki X elementa od I onda je funkcija f * g derivativna u točki X elementa od I i pri tome vrijedi:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Specijalno, za derivaciju produkta funkcije f s konstantom c elementa R dobivamo:

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x).$$

DERIVACIJA KVOCIJENTA

Neka su funkcije f, g : I = R derivativne u točki X elementa od I i ako je g (x) = 0 onda vrijedi:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

DERIVACIJA KOMPOZICIJE FUNKCIJE

Neka su f i g realne funkcije, takve da je kompozicija f o g definirana. Neka je g derivativan u X_0, a f u točki g(X_0). Tada vrijedi:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

DERIVACIJA INVERZNE FUNKCIJE

Neka je f : (a,b) = R neprekidna i strogo monotona funkcija. Neka je nadalje f derivativna u X_0 elementa (a,b) tako da je f crtano (X_0) jednaka 0.

Tada postoji f^{-1} : f(a,b) u skupu elementa R, derivativna je u Y_0:= f(X_0) i vrijedi:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

U nastavku ću navesti tablicu deriviranja i derivacije osnovnih elementarnih funkcija u obliku tablice.

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), \quad (c \in \mathbf{R})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(f \circ t)'(x) = f'(t(x)) \cdot t'(x)$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Slika 6. Pravila deriviranja

$f(x)$	$f'(x)$
c (konst.)	0
x^{α} $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha - 1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$ $(= \frac{1}{x} \log_a e)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Slika 7. Derivacije osnovnih elementarnih funkcija

Tehnika deriviranja se sastoji u tome da na pravilan način primijenimo pravila deriviranja i navedena tablica derivacija osnovnih elementarnih funkcija.

7.3 TEOREMI DIFERENCIJALNOG RAČUNA

U matematici poznajemo pet osnovnih teorema diferencijalnog računa, a to su: Fermatov, Rolleov, Lagrangeov, Cauchyjev i Taylorov. Isto tako u njima uočavamo i neke posljedice u kojima su sadržane osnove za teorijski razvoj i praktičnu primjenu diferencijalnog računa.

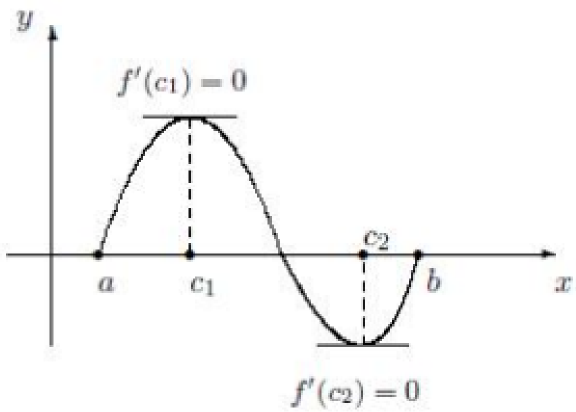
FERMATOV TEOREM

Neka funkcija f : [a, b] =R u točki X_0 elementa a, b ima lokalni ekstrem. Ako je f derivativnu točki X_0 onda je f crtano u točki X_0 jednaka 0.

Ovaj teorem još je poznat i kao nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema za derivativnu funkciju definiranu za interval.

ROLLEOV TEOREM

Neka je funkcija f neprekidna na segmentu (a, b) i derivativna intervalu (a, b). Ako je f(a)= f(b)=0, onda postoji točka c u elementu (a, b) takva da je f crtano c jednak nuli.

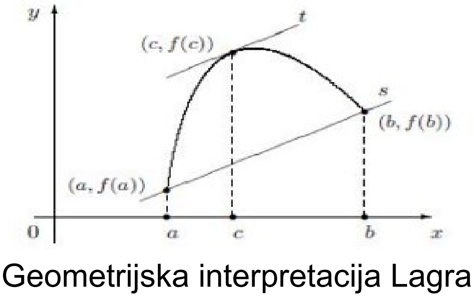


Slika 8. Geometrijska interpretacija Rolleova teorema

Graf neprekidne funkcije siječe x-os u dvije točke i ima tangentu u svakoj točki između te dvije nula točke, onda između njih postoji barem jedna među točka u kojoj je tangenta paralelna s x-osi.

LAGRANGEOV TEOREM

Ako je funkcija f neprekidna na segmentu (a, b) i derivativna na intervalu (a, b) onda postoji točka c u elementu (a, b) takva da je f(b) – f(a)= f(c)(b-a).



Slika 9. Geometrijska interpretacija Lagrangeova teorema

Ako pomičemo paralelno sekantu s određenim točkama (a, f (a)) i (b,f (b)) doći ćemo do tangente t u točki (c, f (c)).

CAUCHYJEV TEOREM

Neka su f i g neprekidne funkcije na segmentu (a, b) i derivativnu intervalu (a, b). Ako je g crtano na os X jednak 0 za svaki X element (a, b), onda postoji točka c elementa (a, b) takva da je:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

TAYLOROV TEOREM

Neka je (a, b) interval, c elementa (a, b), f : (a, b) = R, funkcija koja ima (n+1)-vu derivaciju na intervalu (a, b) i p bilo koji prirodan broj. Tada za svaki X element (a, b) postoji realan broj ξx (c < ξx < x) za x < c, odnosno x < ξx < c), takav da vrijedi:

$$f(x) = f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+R_n(f,c;x), (*)$$

Gdje je:

$$R_n(f,c;x) = \left(\frac{x-c}{x-\xi_x}\right)^p \cdot \frac{(x-\xi_x)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Formulu (*) nazivamo Taylorovom formulom funkcije f u točki c, dok polinom

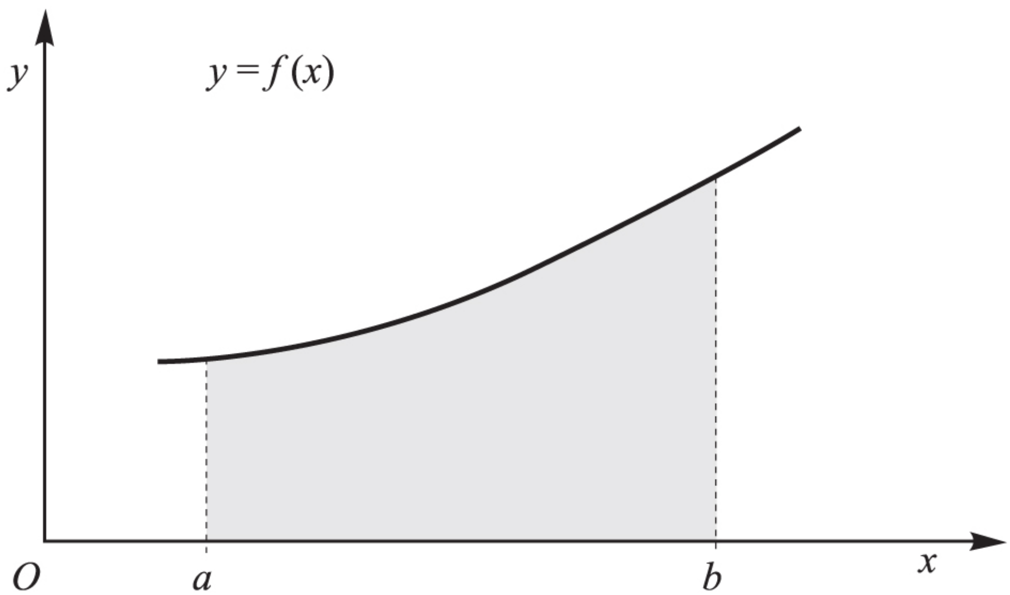
$$T_n(f,c;x) = f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

nazivamo n-tim Taylorovim polinomom funkcije f u točki c. Za R_n(f, c, x) kažemo da je n-ti ostatak funkcije f u točki c.

8. INTEGRALNI RAČUN

Integralni račun je dio infinitezimalnog računa u kojem se proučavaju metode izračunavanja vrijednosti integrala. To je specifična grana matematike koja se razvila iz potrebe da se izrazi iznos, stupanj ili jakost fizikalnih objekata ili događaja.

Početci integralnog računa mnogo su stariji od nastanka diferencijalnog računa. Već metoda kojom je Arhimed izračunavao površinu kruga i segmenta parabole zametak je integralnog računa. Takvu metodu, proširili su i na druge probleme, te su je nastavili razvijati do 17. stoljeća. Glavni predstavnici koji su nastavili niz razvijanja bili su Johannes Kepler, Francesco Bonaventura Cavalieri, Galileo Galilei, Blaise Pascal i Pierre de Fermat, sve dok Gottfried Wilhelm Leibniz i Isaac Newton nisu postavili temelje na kojima su Augustin-Louis Cauchy, Karl Weierstrass i dr. u XIX. Stoljeću od integralnog računa stvorili jedno od najznačajnijih sredstva matematičke analize. U novije doba se iz integralnog računa razvila teorija mjere, koja je naišla na svestranu primjenu, posebno u teoriji vjerojatnosti i u teoriji diferencijalnih jednadžbi.



Slika 10. Integralni račun

8.1 VRSTE INTEGRALA

Određeni integral funkcije f definira se kao površina područja ispod grafa funkcije f i iznad osi x ako je f realna funkcija definirana na segmentu $[a, b]$ realnih brojeva ($a \leq x \leq b$), te ako poprima samo pozitivne vrijednosti. Ako funkcija f poprima i negativne vrijednosti, površinu područja iznad grafa a ispod osi x uzima se s negativnim predznakom. Određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ je broj a označuje se sa:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Neodređeni integral od funkcije f je funkcija F kojoj je derivacija jednaka f, tj. $F'(x) = f(x)$; F se naziva i primitivna funkcija funkcije f. Budući da je derivacija konstante jednaka nuli, $F + C$ također je primitivna funkcija od f za bilo koju konstantu C. Dodavanjem konstanata jednoj primitivnoj funkciji dobivaju se sve primitivne funkcije od f. Neodređenim integralom često se naziva i skup svih primitivnih funkcija od f; taj se skup označuje sa:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Osnovni teorem integralnog računa govori o vezi između određenog i neodređenog integrala i glasi: ako je F primitivna funkcija od f, tada je određeni integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ jednak razlici vrijednosti funkcije F na krajevima toga segmenta:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

S pomoću tog teorema mogu se efektivno izračunati određeni integrali mnogih elementarnih funkcija. Također slijedi da se primitivna funkcija može izračunati s pomoću određenog integrala:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x + C.$$

8.2 VRSTE INTEGRALNIH TEOREMA

RIEMANNOV TEOREM

Teorem utvrđuje klasu integrabilnih funkcija i postojanje vrijednosti integrala na segmentu. Teorem je dokazao G.F.B. Riemann i obično se iskazuje u dvije tvrdnje:

1. neprekidna funkcija na segmentu realnih brojeva je i integralna na tom segmentu

2. za neprekidnu funkciju f na segmentu (a, b) realnih brojeva postoji točka c takva da:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Broj *f(c)* se naziva **srednja vrijednost** na segmentu [a, b]. Dokaz teorema se oslanja na svojstva jednolike neprekidnosti funkcije.

8.3 ODREĐENI I NEODREĐENI INTEGRAL

SVOJSTVA ODREĐENOG INTEGRALA

(*) Konstanta funkcije x = c je integralna na svakom segmentu (a, b) te pri tome dobivamo slijedeći zapis:

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

(*) Ako je c element (a, b) i f : (a, b) = R integralna funkcija na (a, b) onda je je f integralna na (a, c) i (c, b) te dobivamo na taj način novi zapis:

(*) Ako je c element (a, b) i f integralna funkcija i na (a, c) i (c, b) onda je f integralan na (a, b) i vrijedi novi zapis

:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(*) Ako je funkcija f integralna na (a, b) i v bilo koja konstanta, onda vrijedi da je c * f integralna na (a, b) i imamo slijedeći zapis:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

(*) Ako su funkcije f i g integralne na (a, b) onda je funkcija f + g integralna na

(a, b) i vrijedi ovaj zapis:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(*) Ako su funkcije f i g integralne na (a, b), i f(x) koji je strogo manji od g(x) za svaki element u skupu X (a, b) onda imamo:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

NEODREĐENI INTEGRAL I NJEGOVA SVOJSTVA

Kao što postoji u matematici određeni integral tako postoji i neodređeni integral. On je po svojim svojstvima i mogućnostima pružanja formule drukčiji od određenog integrala. Za njega kažemo da ima primitivnu funkciju, te svaku funkciju koja u sebi sadrži f na skupi I nazivamo F sa nekim određenim svojstvom. Naravno za funkciju f kažemo da je integralna na I, ako ona na I ima primitivnu funkciju. Skup svih primitivnih funkcija f označavamo kao f(x)dx te ih iz toga razloga nazivamo neodređenim integralom funkcija f, dok postupak traženja neodređenog integrala nazivamo integriranje. Za integriranje kažemo da je invertna operacija od deriviranja stoga se rezultat integriranja uvijek može provjerit obrnutom računskim iznosom a to je deriviranje.

Za neodređeni integral vežemo 2 važna svojstva:

1. **HOMOGENOST NEODREĐENOG INTEGRALA**: u primjeru imamo funkciju f : **I= I** koja je integralna na I i bilo koji drugi realan broj, samim time funkcija će biti integralna i na I pa dolazimo do novog zapisa:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

2. ADITIVNOST NEODREĐENOG INTEGRALA: ako za primjer uzmemo funkciju

f, g : I = R integralne na I, ona je funkcija f + g integralna na I i automatizmom dolazi novi zapis:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx),\ c \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$\int c\,\mathrm{d}x = cx + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\Rightarrow$	$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln \mid x \mid) = \frac{1}{x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \mid x \mid + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x,\ (a > 0 \text{ i } a \neq 1)$	$\Rightarrow$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$	$\Rightarrow$	$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cos x) = \sin x$	$\Rightarrow$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln \mid \sin x \mid) = \operatorname{ctg} x$	$\Rightarrow$	$\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln \mid \sin x \mid + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln \mid \cos x \mid) = \operatorname{tg} x$	$\Rightarrow$	$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln \mid \cos x \mid + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1^2-x^2}} = \arcsin x + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert\right) = \frac{1}{x^2-1}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert + C$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln \lvert x + \sqrt{x^2+1}\rvert\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln \lvert x + \sqrt{x^2+1}\rvert + C$

Slika 11. Tablica neodređenih integrala

9. PRAVILA INTEGRIRANJA

U matematici poznajemo osnovne metode integriranja integrala, naravno da bi to savladali i naučili jako je važno dobro poznavati tablicu neodređenih integrala i svojstva neodređenih integrala. Glavna tri pravila za integriranje su direktna integracija, metoda supstitucije koja se koristi i u današnje doba te parcijalna integracija. Svaku metodu integriranja objasnit ću posebno i objasniti.

1. DIREKTNA INTEGRACIJA: glavna prednost ove integracije je ta da se zadana pod integralna funkcija transformira i „raspadne“ na nekoliko elementarnih funkcija, tj glavnih, koje ćemo nakon toga integrirati prema formulama iz navedene tablice neodređenih integrala.

2. METODA SUPSTITUCIJE: neke primitivne funkcije možemo naći direktno, te u takvim situacijama možemo probati upotrijebiti metodu supstitucije ili uvođenje nove varijable. Takvim načinom se pod integralna funkcija dovodi u vezu sa kompozicijom funkcije.

3. PARCIJALNA INTEGRACIJA: Iz osnovnih pravila za deriviranje kompozicije funkcija dobili smo pravilo za integriranje supstitucijom. Na sličan način, iz formula za deriviranje produkta dobivamo formulu za parcijalnu integraciju. Za parcijalnu varijablu uzimamo neprekidne derivativne funkcije na određenom zadanom intervalu, pod uvjetom da svaka nova funkcija mora biti integralna na interval koji je naravno zadan.

10. PRIMJENA DIFERANCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA U DRUGIM STRUKAMA (FIZIKA)

Što se tiče samog integralnog i derivativnog računa njih često možemo povezati i sa nekim drugim strukama odnosno prirodnim znanostima, kao što su kemija ili fizika. Sama primjena u fizici objašnjena je kroz određene pojmove kojima se koristimo kako bi nešto lakše izračunali. Pod glavne pojmove koje koristima u primjeni fizike a da se koriste ova dva računa su put koji prijeđe točka (ako imamo točku koja se giba po nekoj krivulji, i imamo njenu apsolutnu veličinu brzine označenu malim slovom v i vrijeme t, onda na takav način dobivamo put koji prijeđe ta točka u intervalu određenog vremena). Pod drugi pojam vežemo rad sile (ako imamo promjenjivu silu X koja djeluje na interval f(x) ona naravno mora djelovati u smjeru odi OX, na takav način dobivamo rad sile u zadanom intervalu). Zadnji i ključni pojam za primjenu integralnog računa i diferencijalnog je kinetička energija koja i danas ima veliku ulogu u ovoj ključnoj prirodnoj znanosti. Kinetičkom energijom dobivamo materijalne točke mase označene sa malim slovom m i brzine v i pri tome se dobiva nova formula za kinetičku energiju. Za određivanje kinetičke energije tijela rastavljamo na određeni način prema elementarnim česticama (uloga materijalnih točaka), te nakon toga, smirujući kinetičku energiju tih čestica, u limesu umjesto gore navedene sume dobivamo integral.

10.1 PRIMJERI ZA PRIMJENU U FIZICI

1. FORMULA ZA PUT KOJI PRIJEĐE TOČKA

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Primjer broj 1. Brzina točke je je v = 0,1 t^3 m/s. Moramo naći put s kojeg prijeđe točka u vremenu T = 10 sekundi od početka gibanja. Kolika je srednja brzina gibanja za to vrijeme?

Rješenje primjera br. 1 :

$$s = \int_0^{10} 0,1t^3 dt = 0,1\frac{t^4}{4}\Big|_0^{10} = 250m \qquad i \qquad v_{sr} = \frac{s}{T} = 25m/s$$

2. FORUMULA ZA RAD SILE

$$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Primjer broj 2. Koliki rad treba potrošiti da se opruga rastegne za 6 cm ako sila od 1 kp rastegne oprugu za 1 cm?

Rješenje primjera br. 2: Prema Hookovu zakonu sila X kp, koja rasteže oprugu za X_m, iznosi

X = kr, gdje je k koeficijent proporcionalnosti. Morat ćemo pretpostaviti da X iznosi 0,01 m i da je X = 1kp, tako ćemo dobiti k = 100 i prema tome X= 100x, od tuda ćemo dobiti traženi rad:

$$A = \int_{0}^{0,06} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,06} = 0,18kpm.$$

3. FORMULA ZA KINETIČKU ENERGIJU

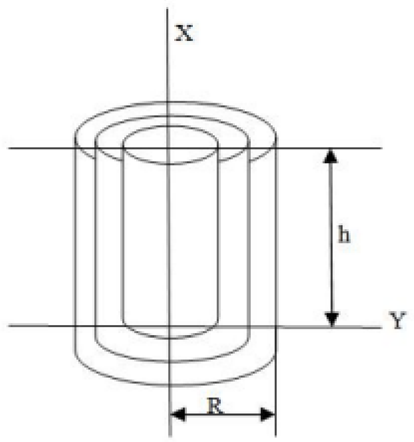
$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Kinetička energija sustava od n materijalnih točaka s masama $m_1, m_2 \ldots, m_n$ i pripadajućim brzinama $v_1, v_2 \ldots, v_n$ jednaka je:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Za određivanje kinetičke energije tijela rastavljamo na određeni način i čestice (uloga materijalnih točaka), a kad smirimo kinetičku energiju tih čestica, u limesu umjesto gore navedene sume dobivamo novi integral.

Primjer broj 3. Pokušat ćemo pronaći kinetičku energiju homogenog kružnog valjka gustoće δ s polumjerom baze R i visinom h, koja se vrti kutnom brzinom ω oko svoje osi. (slika 12.)



Slika 12. Homogeni kružni valjak

Rješenje primjera br. 3: Za elementarnu masu dm odabiremo masu šupljeg valjka visine h, s unutarnjim polumjerom r i debljinom stjenke dr. Imamo dm koji iznosi

2πr · hδdr. Linearna brzina mase iznosi v= rω, to je elementarna kinetička energija.

$$dK = \frac{v^2 dm}{2} = \pi r^3 \omega^3 h \delta dr$$

Iz toga zapisa slijedi novi izračun:

$$K = \pi\omega^2 h\delta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\omega^2 \delta R^4}{4}.$$

11. ZAKLJUČAK

Ovim završnim radom kojem je tema bila primjena integralnog i diferencijalnog računa u području primijenjenih tehničkih znanosti istražio sam i zaključio sve vezano za navedenu temu. Prilikom istraživanja krenuo sam sve od ranog i srednjeg vijeka tako što sam pronašao same početke uopće nastajanje same grane matematike pa tako i to tvoraca ove grane koja pridonosi razvoju ne samo pojedinih ljudi odnosno osoba već i čovječanstva. U početku pisanja završnog rada krenuo sam istraživati sa poznate predstavnike kao što su Isaac Newton i njegovi ostali sljedbenici. Načinom promatranja i traženja naišao sam na analize koje su nastale Newtonovim zaslugama, te derivacija koja je nastala također pod njegovim utjecajem a i danas se koristi. Isto tako prema svim zaključcima koje mi je nudio Internet i internetsko istraživanje, uvidio sam da je i veliku ulogu u matematici i pridonio Gottfried Leibniz svojim i integralnim računom. Kroz kratko objašnjenje i izračune potaknuo je stvaranjem algoritama, naravno pute infinitezimalnog računa te dodao naziv i formule za diferencijalni račun koji se koristi i u današnje doba. Na samom kraju završnog rada naučio sam nešto u vezi integralnog računa koji se dijeli na određeni i na neodređeni integral i njihova svojstva i vrste bez kojih matematika ne bi bila nimalo zabavna, a ni poučna za niti jednog čovjeka pa ni dijete. Pisanjem završnog rada uvidio sam kako je matematika strogo vezana i za ostale prirodne grane kao što su fizika ili kemija. Svaka formula i svaki zapis nastao na području matematike koristi se i u ovim znanostima ali u drukčijim zapisima i vrijednostima. Ovaj završni rad bio mi je iznimno zanimljiv i interesantan, iz razloga što je matematika široki pojam i može se uvijek nešto novo naučit, a da nisu brojevi ili slova. Isto tako matematika nam pruža mogućnost razmišljanja i drukčiji odabir i izračun bilo kakvog računa a da nije diferencijalni ili integralni. Smatram da bi poticaj matematike kao komplicirane ali zanimljive grane mogao potaknuti više među djecu i mlađu populaciju, jer u današnje doba većina matematiku ne voli što je izrazito krivo i precijenjeno mišljenje.

LITERATURA

https://hr.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton (pristupljeno 01.08.2020.)

https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=43655 (pristupljeno 01.08.2020.)

http://web.studenti.math.pmf.unizg.hr/~babyboom/staro/rad.html (pristupljeno 01.08.2020.)

https://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS_Newton_i_Leibniz.pdf

(pristupljeno 01.08.2020.)

https://hr.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz (pristupljeno 03.08.2020.)

https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=35902 (pristupljeno 03.08.2020.)

https://hr.wikipedia.org/wiki/Infinitezimalni_ra%C4%8Dun (pristupljeno 03.08.2020.)

https://www.mathos.unios.hr/matefos/Files/predavanja/p8.pdf (pristupljeno 04.08.2020.)

http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node98.html (pristupljeno 04.08.2020.)

https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=27586 (pristupljeno 08.08.2020.)

https://hr.wikipedia.org/wiki/Integral (pristupljeno 08.08.2020.)

http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node35.html (pristupljeno 08.08.2020.)

https://hr.wikipedia.org/wiki/Tablica_integrala (pristupljeno 12.08.2020.)

https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/s4-prof/Derivacije_integrali/index.html

(pristupljeno 12.08.2020.)

Kerry Logan Hollihan: Isaac Newton i fizika za mlade - Njegov život i ideje kroz 21 aktivnost (stručna literatur)

POPIS SLIKA

SAŽETAK

U završnom radu spominjemo matematičku analizu koja se dijeli na dvije grane a to su diferencijalni i integralni račun. Isto tako kroz rad se javljaju i poznati predstavnici koji su doprinijeli stvaranju i uspjehu matematike kao što su Isaac Newton i G.W. Leibniz. Njihovim zaslugama dobili smo nove jednadžbe koje nam koriste za izračunavanje određenih funkcija bile one neki određeni ili neodređeni integral. U prvom dijelu smo se više dotakli povijesti i samog razvoja matematike u određenom razdoblju (Newtonove zlatne godine) dok smo kroz ostali dio rada prikazivali cjeline računa. Cjeline računa odnose se na derivacije i sami integralni i diferencijalni račun. Na samom kraju završnog rada predstavljene su korisne primjene derivacija i integrala u području fizike koje se koriste i danas.

Ključne riječi: matematička analiza, Isaac Newton, W.G. Leibniz, integrali, derivacije

ABSTRACT

The final article to mathematical analysis, which divides it into two branches, namely of differential and integral account. And operations occur, and well-known representatives, who contributed to the creation and success of mathematics such as Isaac Newton and G. W. Leibniz. Their advantages we have obtained a new equation that we used to calculate certain functions were those of a specific or indefinite integral. In the first part we more than touched upon the history and development of mathematics in this period (Newton's Golden years), while we are using other parts of the work contain the whole account. In General, accounts are themselves derivative and integral and differential count. At the end of the final works presented useful applications of derivative and integral in physics that are used today.

Key words: mathematical analysis, Isaac Newton, V. G. Leibniz, integrali, the derivative