

# Rješavanje tehničkih i mehaničkih problema matematičkim alatom

---

**Kuhar, Sandy**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Istrian University of applied sciences / Istarsko veleučilište - Università Istriana di scienze applicate**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:212:422292>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-23**



*Repository / Repozitorij:*

[Digital repository of Istrian University of applied sciences](#)



**ISTARSKO VELEUČILIŠTE**

**PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ**

**RJEŠAVANJE TEHNIČKIH I MEHANIČKIH PROBLEMA MATEMATIČKIM  
MODELOM**

**ZAVRŠNI RAD**

**PULA, 2021**

**ISTARSKO VELEUČILIŠTE**

**PREDDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ**

**Rješavanje tehničkih i mehaničkih problema matematičkim modelom**

**ZAVRŠNI RAD**

Predmet: Završni rad

Profesor: pred. Đani Žufić

Student: Sandy Kuhar

**PULA, lipanj, 2021.**

## Sadržaj

Uvod.....	1
Matematika .....	2
Brojevi.....	2
Brojevni sustavi.....	3
Podjela matematike.....	6
Aritmetika .....	6
Geometrija .....	8
Tehnika.....	10
Digitalna tehnologija .....	13
Elektrotehnika.....	16
Atom.....	17
Električna struja.....	20
Slika otpornika.....	23
Primjer računa i rješavanja problema u elektrotehnici .....	24
Mehanika.....	29
Mehanički rad .....	31
Primjer računa i rješavanja problema u mehanici.....	37
Automatizacija .....	40
Blok dijagrami.....	43
Matematički model.....	46
Mehanički sustav .....	47
Električni sustav .....	48
Elektromehanički sustav .....	50
Zaključak .....	52
Literatura .....	54
Popis priloga.....	56

## Uvod

U današnje se vrijeme sve nastoji usavršiti. Tehnologija, informatika, automatizacija samo su neka od područja koja uvelike napreduju iz dana u dan. Život današnjeg čovjeka nastoji se što više olakšati, protok informacija nikada nije bio veći, a ljudi mogu postizati stvari koje su se prije smatrale nemogućima. Ljudi svakodnevno rade u tim područjima kako bi se sve te stvari mogle omogućiti. Odvojeno, sva ta područja mogu se postaviti zasebno. Tehnološkim inovacijama postiže se da se stvari lakše postižu, informatikom se što bolje prenose informacije i spajaju ljudi diljem svijeta, a automatizacijom se sve te stvari postižu bez velikog utjecaja čovjeka. Iako su sva ta područja danas iznimno napredna, sva su ona potekla iz jednog područja - matematike.

Matematika se koristi u svim područjima života kao složena matematika koja se koristi u raznim znanstvenim područjima ili samo kao obični brojevi koji se svakodnevno koriste; matematika je svuda. „Matematika je prikaz ljudskog uma da reflektira aktivnu volju, pomno osmišljeni razlog, i želju za estetskim savršenstvom" (Courant, i dr., 1996). Kada se govori o matematici, treba se uzeti u obzir da se matematika grana na različita manja područja kao što su aritmetika, geometrija, trigonometrija, itd. Iako se u početku matematika samo koristila za trgovinu, zemljišta i astronomiju, kasnije se matematika provukla u sve druge dijelove znanosti i društvenog života. Uvođenjem matematike u druge znanosti, znatno je doprinijela njihovom napretku i upravo se zato današnje znanosti baziraju primarno na teorijskoj matematici prije bilo kakvih drugih koraka. Upravo se tako postižu nove inovacije u svim znanstvenim djelatnostima. Nakon što se nešto postigne, traže se novi načini kako bi to bilo što lakše postići. U tim se slučajevima najviše koristi matematika. Sve se to svodi na matematičke operacije, čijim se unaprjeđivanjem postižu bolje i novije mogućnosti.

Iako se sve te stvari predviđaju, u matematičkim izračunima uvijek se mogu događati greške i nastati problemi. No kao što je sve to nastalo iz matematike, tako postoje i različiti matematički modeli koji se koriste kako bi se sve te moguće greške ili problemi u nastajanju mogli ukloniti. U ovom će se radu osvrnuti primarno na matematiku i njeno korištenje u problemskim zadacima kao i usporedbu između matematičkog modela u rješavanju problema i matematičkog modela u dinamičkim sustavima i procesima.

## Matematika

### Brojevi

U ljudskom svakodnevnom životu brojeve konstantno koristimo. Brojevima se prati rezultat kad se igraju igre, prate se cijene proizvoda koji se žele kupiti, organizira se osobno vrijeme, prati se datume, itd. Služenje brojevima olakšava život u svim smjerovima. U različitim zemljama, čak i u prošlosti, ljudi su različito označavali brojeve. Broj je baza matematike. Broj je stvorio ljudski um da broji objekte u različitim sastavima, brojevi nemaju nikakve veze s karakteristikama objekta koji se broji. (Courant, Robbins, 1996) Brojevi su uvijek isti u svim kulturama, ali se brojke drugačije pišu. U svijetu se najčešće koriste arapske brojke i u pojedinim slučajevima rimske, ali brojevi uvijek idu istim redom od 1 do 10 na svim različitim jezicima i načinima pisanja - uvijek će biti isti brojevi od 1 do 10. No, postoje različiti sustavi koji imaju svoje načine pisanja brojeva i neki od tih sustava se i danas koriste.

## Brojevi sustavi

Brojevi uvijek idu istim redom, ali svi ti brojevi imaju različite načine zapisivanja. Neki od tih načina odnose se samo na korištenje drugog simbola umjesto broja no neki se načini odnose na sustave s drugom bazom. Postoji pet brojevnih sustava, a to su decimalni, oktalni, dekadski, heksadecimalni i rimski. Decimalni sustav kao bazu ima broj 2, dekadski bazu 10, a heksadecimalni bazu 16. Baza sustava odnosi se na koliko brojeva se mogu zapisati samo s jednom znamenkom odnosno simbolom, dok se ostali brojevi zapisuju kombinacijom brojeva iz baze. Iako bi bilo jednostavnije imati smo jedan sustav, ti su sustavi pronašli svoje mjesto u nekim znanstvenim disciplinama te se koriste kao baza u nekim poprilično zahtjevnim tehnologijama. Upravo zbog svog načina zapisivanja, ti sustavi imaju svoju ulogu u pojednostavljivanju zapisa ili pojednostavljivanju rada. Binarni sustav bazira se na izmjeni jedinica i nula te se tako zapisuju različiti brojevi, ali također se na izmjeni tih nula i jedinica bazira cijela informatika, odnosno pokreće i upravlja računalima i unapređuje tehnologija. Razvoj oktalnog sustava nastavio je iz potrebe da se olakšaju zapisi, no taj sustav nije dugo opstao. Heksadekadski sustav nastao je iz primarno korištenog oktalnog sustava čija je baza bila broj 8. Heksadekadski sustav koristi se kako bi se olakšali zapisi inače poprilično dugih binarnih zapisa. Dekadski sustav kao najjednostavniji od navedenih, koristi se svaki dan i svima je poznat. Rimski se sustav i dan danas koristi u datumima i drugim vrstama obilježavanja. Glavna razlika između rimskog i ostalih sustava je u tome što se cijeli rimski sustav temelji na zapisu brojeva potpuno drugačijim simbolima od ostalih sustava.

prirodni broj	rimski brojevi	dekadski	binarno	oktalno	heksadekadski
nula		0	0	0	0
jedan	I	1	1	1	1
dva	II	2	10	2	2
tri	III	3	11	3	3
četiri	IV	4	100	4	4
pet	V	5	101	5	5
šest	VI	6	110	6	6
sedam	VII	7	111	7	7
osam	VIII	8	1000	10	8
devet	IX	9	1001	11	9
deset	X	10	1010	12	A
jedanaest	XI	11	1011	13	B
dvanaest	XII	12	1100	14	C
trinaest	XIII	13	1101	15	D
četnaest	XIV	14	1110	16	E
petnaest	XV	15	1111	17	F

12

Slika 1: Brojevni sustavi

Brojevi i brojevni sustavi su osnova matematike. Sve se matematičke operacije odrađuju pomoću brojeva, ali njihov zapis se razlikuje s obzirom na sustav u kojem se nalaze. No, sve se matematičke operacije u većini slučajeva odrađuju u dekadskom sustavu zbog njegove jednostavnosti u odnosu na druga dva sustava. Ako je potrebno, svi ti sustavi mogu se pretvarati jedan u drugi putem posebnih pravila. Kao i pretvorbe sustava iz jednog u drugi, sve te matematičke funkcije imaju svoja pravila. Svima su poznate najosnovnije matematičke operacije zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Iako su to osnovne matematičke operacije, postoje i mnoge druge koje su složenije i koriste se u različitim znanstvenim disciplinama kako bi se postigli što točniji rezultati. No, gledajući matematiku kao cjelinu sve se njene ostale operacije baziraju na jedan ili drugi način na osnovnim operacijama. U početku, te su operacije bile dovoljne kako bi se zadovoljile potrebe običnog čovjeka. Razvojem matematike, razvijaju se i druge znanosti. Potreba za sve složenijim



tehnologijama raste, a time nastaju i sve složeniji matematički proračuni. Ti su proračuni omogućili mnoga unapređenja u znanosti pogotovo u fizici, kemiji te tehničkim i tehnološkim znanostima.

## Podjela matematike

### Aritmetika

Matematika se može podijeliti na dvije najosnovnije velike discipline na koje se obično dijeli: geometriju i aritmetiku. Aritmetika se odnosi na računanje odnosno na matematiku koja se bavi proučavanjem računskih operacija s brojevima. Kao što je već spomenuto, četiri osnovne matematičke operacije zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje su baza aritmetike. Osim što se bavi operacijama, bavi se i različitim vrstama brojeva koji se koriste u matematičkim operacijama. Brojevi osim što mogu biti prirodni, mogu biti i racionalni, odnosno u obliku razlomaka, cijelih brojeva, koji se odnose na prirodne brojeve i negativne te realnih brojeva, koji se odnose na brojeve s decimalama. Sve te vrste brojeva su potrebne kako bi se danas ljudi mogli lakše organizirati u svim dijelovima života. Aritmetika je neophodna, i s vremenom je mnogo napredovala pa su se iz nje razvile različite nove grane koje koriste brojeve i matematičke operacije kako bi se postigle različite inovacije.

Zbrajanje:

$$\begin{array}{r} 15,05 \\ + 103,75 \\ \hline 118,80 \end{array}$$

Oduzimanje:

$$\begin{array}{r} 256,98 \\ - 24,68 \\ \hline 232,30 \end{array}$$

Množenje:

$$\begin{array}{r} 25,3 * 13,05 \\ \hline 253 \\ 759 \\ 000 \\ + 1265 \\ \hline 330,165 \end{array}$$

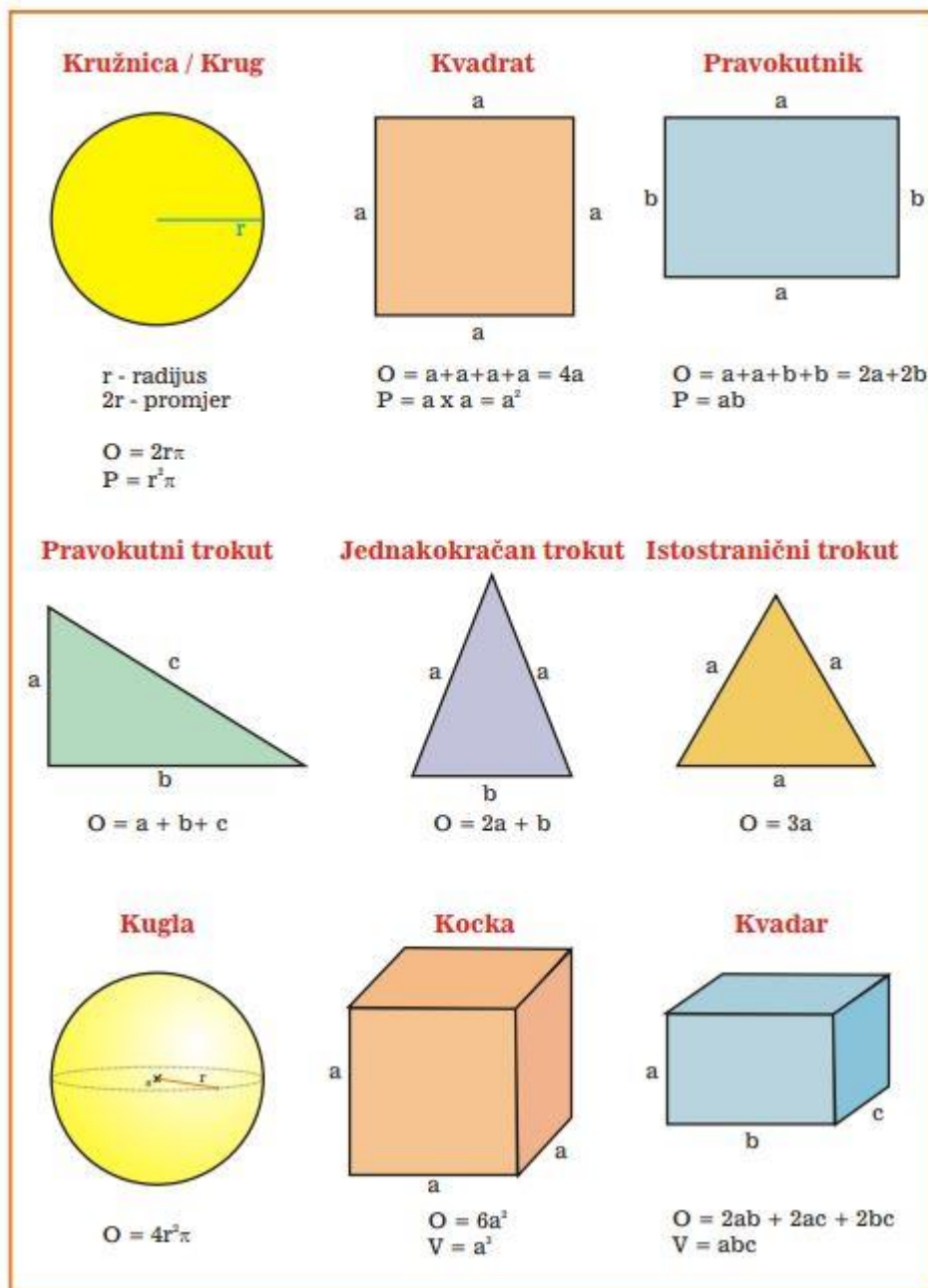
Dijeljenje:

$$475 : 4 = 118 \text{ i ostatak } 3$$
$$\begin{array}{r} - 4 \\ \hline 07 \\ - 4 \\ \hline 35 \\ - 32 \\ \hline 3 \end{array}$$

Slika 2: Osnovne računске operacije

## Geometrija

Geometrija je grana matematike koja se bavi matematičkom formalizacijom i proučavanjem ravnine i prostora. Iako se prikazuje kao zasebna grana matematike, geometrija može služiti i za predočavanje aritmetičkih pravila. Geometrija se dalje dijeli na različite druge vrste geometrije, ovisno o tome kojim se specifičnim dijelom bavi. Sve te ostale grane razvile su se unaprjeđenjem geometrije. Geometrija obuhvaća različite načine proučavanja prostora, ali osim prostora, proučava i tijela i likove. Geometrija kao grana matematike može služiti i kao prikaz aritmetičkih pravila jer sama po sebi ima primjene u različitim djelatnostima kao što su primjerice arhitektura i građevina.



Slika 3: Osnovni geometrijski likovi i tijela

## Tehnika

Tehnika je ljudima omogućila mnoga poboljšanja u svakodnevnom životu. Sve naprave koje se danas svakodnevno koriste imaju bazu u tehnici. Od mobitela, televizija, automobila i računala pa sve do vrhunske medicinske opreme, astronomskih teleskopa te čak CERNOV sudarač čestica, nastali su primjenom tehnike. Poprilično često, tehnika se smješta samo u novije doba, te povezuje s izradom nove tehnologije i strojeva. Ali, tehnika ima početke tisućama godina ranije. Najlakše se to može prikazati ako se tehnika kao pojam definira. Tehnika se može definirati kao skup oruđa i znanja koja je čovjek koristio kako bi u skladu s prirodom prilagodio dostupne stvari svojim potrebama. Iz ovog se može izvući da tehnika podrazumijeva znanja potrebna kako bi se oruđem postiglo sve ono što je čovjeku potrebno. To prikazuje da se tehnika ne odnosi samo na nove tehnologije i strojeve, već i na sve ono što su prve civilizacije napravile prve kuće, prva navodnjavanja, te čak i izum kotača. Pošto je tehnika vrlo široka i odgovorna za proizvodnju svega do današnjeg dana, teško ju je posebno podijeliti na grane - iz tog razloga tehnika se uglavnom dijeli s obzirom na struke. Pod tehniku se podrazumijevaju brodogradnja, elektrotehnika, elektronika, razne vrste tehnologije i drugi.

Tehnika i tehnologija su pojmovi koji se često znaju miješati. No iako se isprepliću, tehnologija i tehnika su različite. Tehnika, kao što je već ranije navedeno, obuhvaća različita znanja i vještine pomoću kojih se korištenjem oruđa i ostalih resursa postižu da se zadovolje čovjekove potrebe, dok tehnologija uz znanje i vještine obuhvaća i objekte odnosno razne uređaje, instalacije i druge pomoćne alate. No, kako tehnika, tako i tehnologija sve svoje radove bazira na znanju i znanstvenom istraživanju.

Iako tehnika postoji duže vrijeme, tehnologija je relativno novija pojava. Postoje različita otkrića koje se mogu gledati kao početci tehnologije, ali prvi veliki napredak u tehnologiji definitivno se određuje izumom parnog stroja. Parni stroj je omogućio velika unaprjeđenja u svim aspektima čovjekova života. Parni stroj bio je prvi u nizu načina na koji se jedna vrsta energija pretvara u drugu. Do njegova izuma ljudi su se većinom koristili životinjskom ili vlastitom snagom kako bi putovali ili obavljali teške poslove. Nakon parnog stroja, u budućnosti su se počeli razvijati druge vrste strojeva koji su dodatno obogatili tehnologiju i olakšali ljudski život. Strojevi su unaprijedili industriju civilizacija i uveli ljude u novu eru modernijeg doba.

Strojevi se doživljavaju kao uređaji koje se pokrene, a oni obavljaju zadatak koji im je zadan. Gledaju li se strojevi samo tako, može se vidjeti da i alati zapravo rade isto. Ali, strojeve je potrebno drugačije definirati. Može ga prikazati kao kompleks neorganskih agenata za pretvorbu energije odrađivanje posla i povećavanje mehaničkih i senzorskih mogućnosti ljudskog tijela ili smanjivanje na mjerljive komponente procese u životu. Prije nego što su nastali strojevi, postojala je potreba za alatima. Alati su se radili na način da zamjene dio ljudskog tijela i olakšaju posao. Umjesto da se ljudi prilagode svojem stanju i okolišu, odlučili su svoj okoliš i njegove dijelove prilagoditi sebi. Iz toga je potekla potreba za uporabom prvih alata koji su kasnije s vremenom i njihovim unaprjeđenjem omogućili mnoga tehnološka poboljšanja za čovjeka. Nakon što su se godinama koristili alati, izumom strojeva, ti alati dodatno se unaprjeđuju. Glavna razlika između alata i strojeva je u njihovoj razini nezavisnosti. I stroj i alat ovisni su o operateru koji njima upravlja, to jest osobi koja će podići čekić i udariti njime u čavao, odnosno osobi koja će pokrenuti stroj da odradi određeni rad. U oba slučaja koliko god je stroj automatiziran potrebna je pomoć čovjeka da bi se na kraju zadani zadatak odradio. No, stroju je potrebno da ga se postavi i isprogramira te on tada sam obavlja određeni zadatak koliko je dugo potrebno. S druge strane, alat mora konstantno biti u ruci čovjeka koji će njime baratati kako bi se posao odnosno zadatak mogao odraditi. Koliko je čovjek bolji u radu od stroja, može se gledati s više strana. Stroj, kako bi obavio neke zadatke, može biti jako kompleksan i težak za postavljanje, dok jako iskusan čovjek s alatom može taj zadatak puno lakše odraditi. Ova se usporedba više ne bavi alatom nego čovjekom koji njime upravlja i strojem koji je programiran. Iako je u oba slučaja potreban čovjek, granica se povlači između toga koliko čovjek mora biti uključen u cijelom procesu rada. Upravo se iz toga razvila potreba za strojevima i njihovom automatizacijom. Iako su strojevi predodređeni za odraditi zadatak, mnoge su stvari potrebne kako bi on taj zadatak uspio odraditi. Tu se upliće automatizacija koju će se malo više dotaknuti kasnije.

Iako se stroj u ovom slučaju prikazuje kao bolje rješenje, nije. Također, strojevi su predodređeni da odrađuju određenu skupinu zadataka. Alat s druge strane je fleksibilniji i ima više mogućnosti primjene od samoga stroja. Strojevi su mnogo kompleksniji. Potrebno im je točno odrediti granice, što, zašto i kako, odnosno što i na koji način trebaju odraditi. Strojevi su specijalizirani, a za takvu vrstu

specijalizacije potrebna su određena pravila. Svi se strojevi i računala baziraju na pravilima koja su potrebna za njihov rad. Računalo je bazirano na jednostavnom pravilu nule i jedinice, odnosno ima ili nema struje. Iako se današnja tehnologija jako unaprijedila, u svim se tim strojevima i dalje pronalaze jednostavne nule i jedinice koje omogućavaju njihov rad. Sav taj napredak i dalje ima osnove u onom iz čega je i proizašao – matematici.



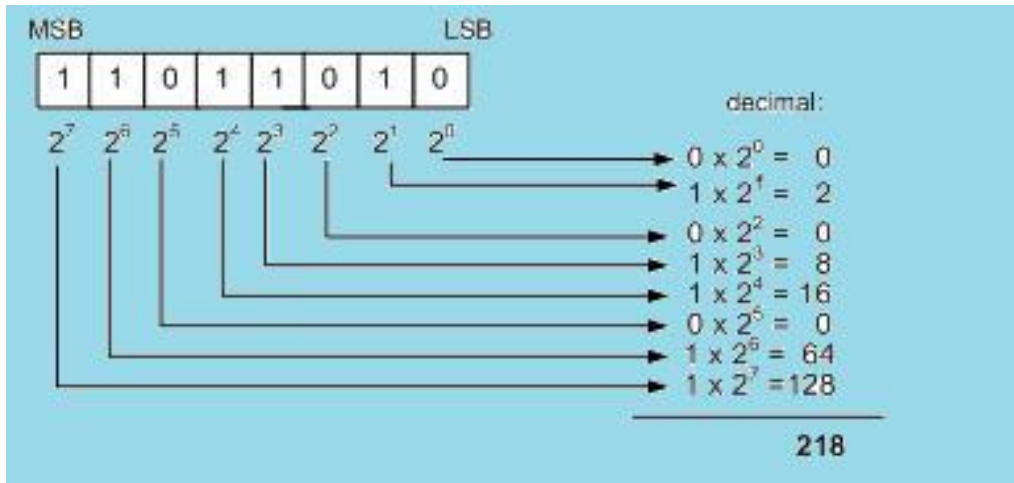
## Digitalna tehnologija

Kao što je već rečeno, početci svih strojeva nalaze se u matematici. Svi strojevi pokreću se uz pomoć nekakvog računala, a to se računalo bazira na binarnom sustavu, odnosno jedinicama i nulama. Računala kao i sve ostale moderne tehnologije, proizlaze iz digitalne tehnologije. To znači da svi ti strojevi, računala i uređaji procesiraju informacije u digitalnom obliku. Riječ „digitalna“ potječe iz riječi „digit“ što bi u prijevodu značilo broj ili znamenka. Digitalna tehnologija znači zapravo proizvedena iz brojeva ili brojeva tehnologija. Digitalno je zapravo jezik kojim se koriste različiti uređaji kako bi komunicirali. Oni pišu, šalju, spremaju, mijenjaju i čitaju različite vrste informacija napisane na tom brojevnom jeziku, tj. u obliku brojevnog koda. Sve različite slike zvukovi pa čak i naredbe koje se zadaju strojevima prikazane su u obliku brojevnih informacija. Tu informaciju strojevi i uređaji procesiraju te znaju kakva je to informacija i što s njom trebaju napraviti. Naravno, ljudi ne mogu te informacije razumjeti kao brojeve te zbog toga svi ti uređaji obrade tu brojevu informaciju kako bi je čovjek mogao razumjeti. Ljudi se danas u potpunosti oslanjaju na digitalnu tehnologiju jer je jednostavnija i mnogo brža od tradicionalnog načina komuniciranja. Jedan e-mail stići će mnogo brže na drugi kraj svijeta nego ako se pošalje pismo. Osim što je brže također je i sigurnije poslati informaciju koja je zapisana brojevnim jezikom nego obično pismo koje svatko može otvoriti. Također svi ti uređaji zaštićeni su pomoću *PIN*-a odnosno osobnog identifikacijskog broja koji osoba postavi kako bi zaštitila svoje osobne informacije.

Bilo koja informacija može se zapisati pomoću brojeva. Ti uređaji uzimaju tu informaciju i pretvaraju je u brojevu. Najjednostavniji način za objasniti bio bi primjerice da je svako slovo u abecedi zamijenjeno brojem s obzirom na poziciju na kojoj se nalazi. Primjerice slovo A kao prvo slovo abecede zauzelo bi prvo mjesto odnosno broj 1, slovo B broj 2, itd. Na taj bi se način bilo koja rečenica, riječ, tekst mogli zapisati u obliku brojeva koji sami po sebi tako zapisani ne bi imali smisla. Ključ leži u kodiranju. Kodiranjem se zapravo slovu ili bilo kojoj informaciji pridodaje brojčana vrijednost koja kasnije može puno brže i sigurnije stići do svog odredišta i prenijeti informaciju.

Iako se svaka informacija može zapisati pomoću brojeva, digitalna tehnologija odlazi korak naprijed. U ovom slučaju prikazali informaciju odnosno slova u obliku brojeva, no prikazali smo ih u dekadskom sustavu. Digitalna tehnologija ide korak

naprijed i sve te informacije zapisuje u obliku binarnog sustava, to jest uz pomoć jedinica i nula. Binarni sustav ima mogućnost da zapiše informaciju kao brojeve no kod binarnog se sustava i drugi brojevi zapisuju u kodu kao kombinaciju jedinica i nula.



Slika 4: Prikaz pretvorbe binarnog sustava u dekadski

Kroz sve te uređaje svakodnevno se prenosi velika količina informacija. Sve su te informacije zapisane u obliku binarnog sustava. Sve te ogromne količine podataka moraju biti prepoznate, zapisane sa strane računala. Računala imaju poseban način na koji razlikuju te jedinice i nule. Naime, unutar računala i drugih uređaja nalazi se milijun malih komponenta koji se nazivaju tranzistori. Ti tranzistori djeluju poput malih prekidača unutar računala. Kada ima dotoka struje, tranzistori prikazuju da ima struje odnosno prikazuju uključeno, kada nema dotoka struje tranzistori prikazuju da struje nema, to jest prikazuju isključeno. Tranzistori se mogu najjednostavnije prikazati kao skup božićnih lampica pri čemu je svaka lampica kodirana treba li svijetliti ili ne. Na kraju, kada se lampice uključe s obzirom na to koje svijetle, a koje ne, prikazana je određena informacija. Na taj način se kodiraju računala i informacije. Binarnim se sustavom svaki uključeni tranzistor označuje sa „1“, dok se svaki isključeni tranzistor označuje s „0“. Na taj se način svaka informacija digitalizira. Prvo se informacija zapiše, nakon toga se ta informacija pretvara u binarni kod i na kraju se taj binarni kod unutar računala ili bilo kojeg drugog uređaja zapisuje kao impulsi struje odnosno kao uključen ili isključen tranzistor. Svaka se ta nula ili jedinica u digitalnom svijetu naziva bit. Skup od osam

bitova naziva se bajt. Upravo se po tim nazivima prikazuje koliko informacija se može spremiti na određeno računalo. S obzirom na to koliko se tih bitova može zapisati na računalo ili neki vanjski prijenosnik podataka kao tipa USB ili CD. Danas se te količine podataka kreću u stotinama gigabajta i terabajtima odnosno  $10^{12}$  bajtova.

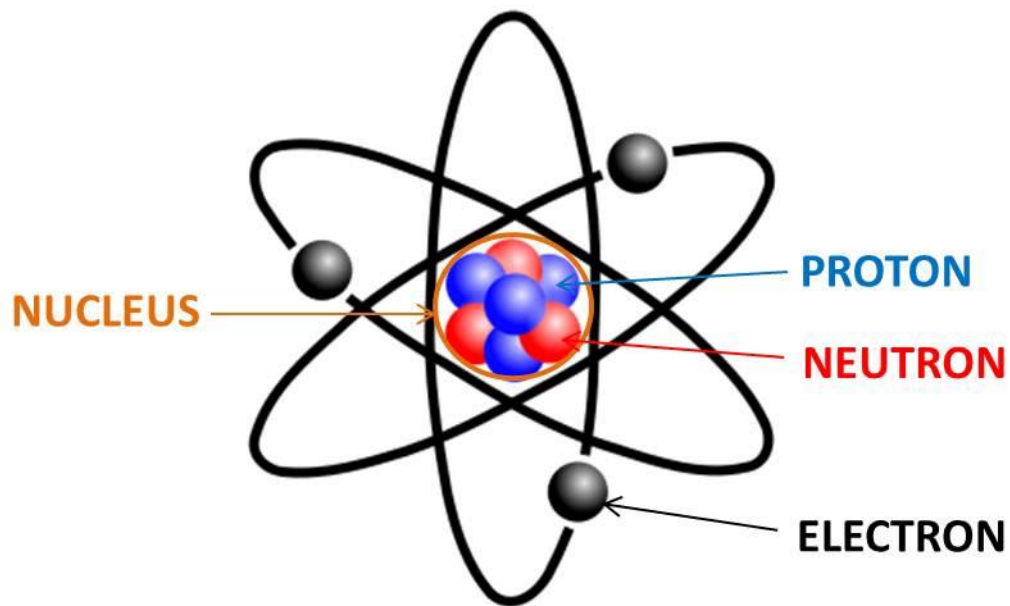
Obrada informacija znači mijenjanje jedne vrste informacija u drugu ovisno o tome za što je ta informacija potrebna. Računalo te informacije obrađuje tako da uspoređuje različite vrste bitova, odnosno jedinica i nula u svojoj memoriji i koristeći jednostavnu matematiku da promjeni određene bitove iz jedne u druge ovisno o tome što je potrebno napraviti. Svi su ti bitovi zapisani na malim tranzistorima koji se nalaze međusobno povezani na mikročipovima i time tvore integrirani krug koji omogućuje komunikaciju među tranzistorima i ostalim dijelovima računala.

## Elektrotehnika

Kako bi sva ta računala i strojevi mogli raditi, potreban im je neki izvor energija koji će ih pokrenuti. U današnje vrijeme taj posao obavlja struja odnosno električna energija. Tehnika sama po sebi ima mnoge grane na koje se dijeli te je tako jedna od njih i elektrotehnika. Elektrotehnika je tehnička znanost koja se bavi proučavanjem, dizajniranjem i primjenom uređaja, opreme i sustava koji koriste struju, elektroniku i elektromagnetizam. Kako bi se mogla iskoristiti ta električna energija, potrebno je određivati točne parametre za svaki pojedini stroj ili uređaj. Svi ti parametri ovise o mnogim čimbenicima koji utječu na električnu energiju koja se koristi za rad stroja odnosno uređaja. Za određivanje svih tih čimbenika, potrebno je započeti od početka odnosno od same struje.

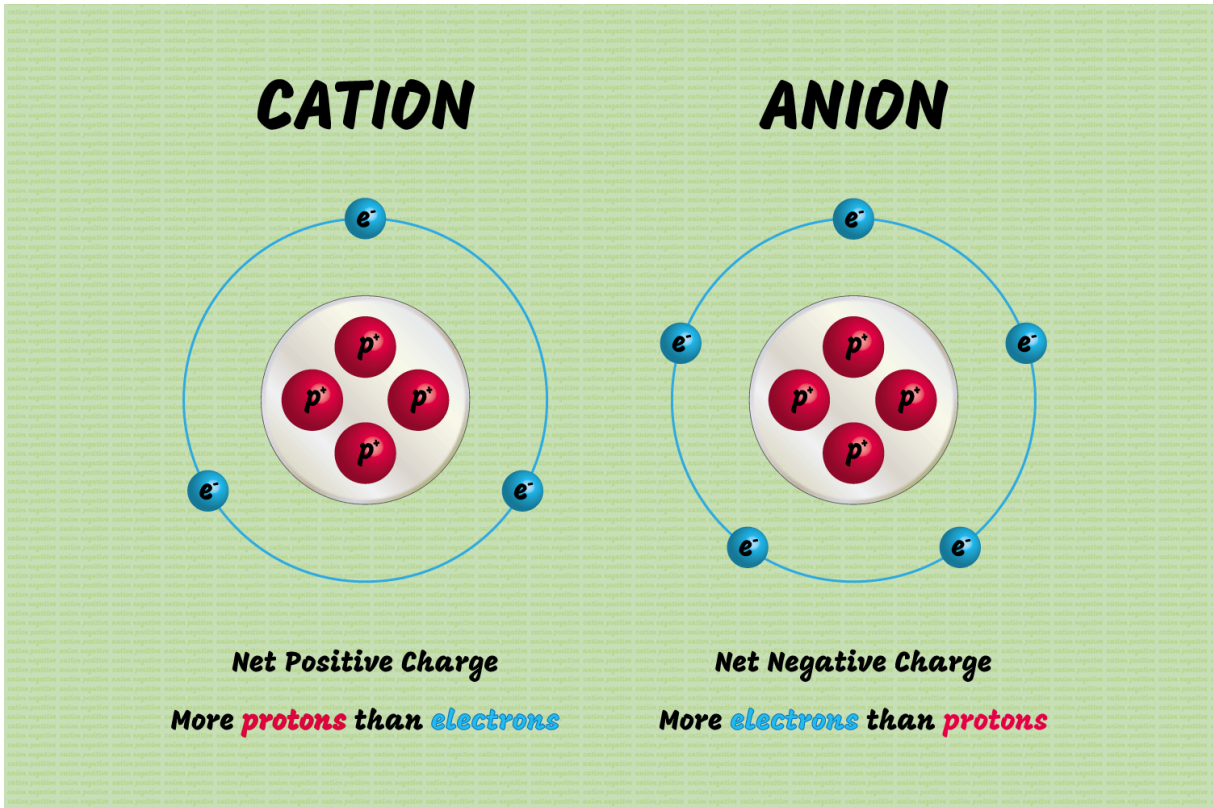
## Atom

Struja se može provoditi kroz različite elemente ovisno o njihovoj vodljivosti. Element je materija koja se ne može podijeliti na sitniju materiju. Najmanja čestica od koje je građen element se naziva atom. Svi atomi građeni su od protona, neutrona i elektrona. Materijali koji su građeni od različitih elemenata, podijeljeni su s obzirom na njihovu električnu vodljivost. Ti materijali mogu biti vodiči, poluvodiči ili izolatori. Kako bi neki materijal bio vodič mora imati mobilnih elektrona koji se mogu slobodno kretati između atoma. Ti elektroni dolaze samo iz valencije atoma, odnosno o broju slobodnih elektrona u posljednjem elektronskom omotaču atoma. Atomi mogu imati nekoliko elektronskih omotača ili orbita kojima se kreću. Svaka orbita ima svoju energetska razinu, to jest elektroni na koji se kreću tom orbitom imaju određenu energiju. Što se više omotač udaljava od jezgre atoma, to je ta energija elektrona veća. Iz tog razloga elektroni u posljednjoj orbiti imaju najveću energiju i slabo su povezani s jezgrom, te im ta energija služi kako bi se mogli odvojiti od jezgre odnosno kako bi taj elektron mogao reagirati s drugim atomima. S obzirom na to, svi elektroni u posljednjoj orbiti nazivaju se valentni elektroni. Ta valencija tih elektrona također određuje i električnu vodljivost koju će taj atom odnosno element imati. Atomi s manje od četiri valentna elektrona su dobri vodiči pošto će tamom otpustiti te elektrone kako bi postao stabilan te će ti elektroni biti slobodni. Atomi s više od četiri elektrona u posljednjoj orbiti su slabi vodiči, dok su atomi s četiri elektrona u posljednjoj orbiti poluvodiči.



*Slika 5: Model atoma*

Pošto su atomi građeni od protona, neutrona i elektrona, oni daju atomu njegov naboj i masu. Protoni i neutroni se nalaze u njegovoj jezgri dok se elektroni nalaze na vanjskim omotačima. Pošto elektroni imaju jako malu masu s obzirom na protone i neutrone, ta se masa u većini slučajeva zanemaruje te se kao masa atoma uzima zbroj mase protona i neutrona. Broj protona u svakom atomu određuje o kojem se elementu radi jer svaki element ima određeni broj protona. U normalnom stanju, atomi imaju neutralan naboj zato što se broj protona i neutrona poklapa, a njihov je naboj suprotan - protoni imaju pozitivan naboj, a elektroni negativan. Atomi su tako sastavljeni na način da se jezgra od omotača ne odvaja zbog toga što se suprotni naboji privlače. Pozitivno nabijeni elektroni i neutralno nabijeni neutroni jezgri daju pozitivan naboj, a negativno nabijeni elektroni u omotaču daju ostatku atoma odnosno omotačima negativan naboj. Na taj način pozitivan naboj protona održava elektrone u njihovim orbitama. Isti se naboji odbijaju te se elektroni u orbiti neće sudarati. No, atomi nisu uvijek neutralni. Atomi postaju ioni s obzirom na to kako gube ili primaju elektrone. U slučaju kada atom izgubi elektron, količina protona veća je od količine neutrona te prevladava pozitivan naboj u tom atomu. Taj atom postaje pozitivan ion koji se naziva se kation. Ako atom prihvati elektron, tada prevladava količina elektrona u atomu te negativan naboj. Taj atom postaje negativan ion ili anion.



Slika 6: Kation i anion

## Električna struja

Električna struja kontrolirano je kretanje elektrona kroz neku materiju. Struja se mjeri u amperima a pokazuje koliko kolumba prolazi kroz određenu točku u kojoj se mjeri svake sekunde. Kolumb je naboj koji posjeduju  $6.25 \cdot 10^{18}$  elektrona. Taj protok elektrona potaknut je elektromotornom silom koja prikazuje rad potreban da se nosioci naboja, to jest elektroni odvoje od izvora električne struje pri čemu ta sila nije direktna posljedica električnog polja. Osim ampera, kod struje su još bitni električni potencijal, elektronvolt i volt. Razlika potencijala između dvije točke u električnom krugu je električni pritisak ili napon potreban da struja između njih poteče. U statičkim slučajevima razlika potencijala jednaka je električnom naponu. Volt je jedinica razlike potencijala i elektromotorne sile Označava se velikim slovo V. Definira se kao razlika potencijala preko otpora od 1 *ohma* prenoseći struju od 1 ampera. Elektronvolt je prikazan kao rad koji elektron obavi kad se kreće u električnom polju potencijalne razlike od 1 volta protiv sile koja djeluje na naboj.

Kada bi struja mogla teći bez gubitaka, tada bi se njena energija mogla 100% iskoristiti. No, to nije moguće jer struja dok teče ima gubitaka koji se mogu pripisati otporu. Otpor možemo prikazati kao suprotstavljanje protoku elektrona. Mjerna jedinica za otpor je *ohm* i označava se grčkim slovom omega  $\Omega$ . Ohm je definiran kao otpor kroz koji konstantna struja od 1 ampera stvara toplinu od 1 *watta*. Otpor je taj koji smanjuje snagu električne energije tako da ovisi o veličini otpora koliko će struja proći kroz određeni vodič. Otporom se smanjuje ili povećava struja, ovisno o tome što je potrebno.

Otpor ovisi od 4 čimbenika. Prvi čimbenik je duljina vodiča s obzirom na to koliki put mora prijeći energija se smanjuje. Drugi čimbenik je poprečni presjek vodiča gdje također veličina vodiča ovisi o tome koliko će se energije izgubiti. Treći čimbenik, koji utječe na otpor, je materijal od kojeg je građen vodič. Kao što je već rečeno, postoji dobri i lošiji poluvodiči i svaki od njih ima različitu veličinu otpora. Posljednji čimbenik je temperatura vodiča. Ako se temperatura određenog vodiča poveća, također će se povećati i otpor vodiča. Za sve čiste vodiče to povećanje uvelike utječe na povećanje njihovog otpora dok za druge materijale nemaju veliki učinak zbog čega se oni većinom koriste za proizvodnju standardnog otpora. Kod poluvodiča se s povećanjem temperature njihov otpor smanjuje. Pošto se jedinica za otpor naziva ohm, jedan od glavnih zakona elektrotehnike koji služi za računanje jer



povezuje otpor, struju i napon naziva se ohmov zakon. Ohmov zakon kaže da je struja, ako se uzme da su sve komponente kao što primjerice temperatura konstantne, direktno proporcionalna naponu između dvije točke gdje R otpor vodiča između te dvije točke.

$$\frac{V}{I} = \text{konstantno ili } \frac{V}{I} = R$$

Osim otpora, za sve račune potrebne za rad sa strujom treba istaknuti još neke veličine koje su međusobno povezane. Uz već ranije spomenuti napon, otpor i jačinu struje potrebno je također spomenuti i snagu. Otpor ima oznaku R, struja I, A napon U ili V. Snaga ima oznaku P. Sve se te osnovne veličine za struju međusobno mogu povezati.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

$$I = \frac{P}{V} = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{U^2}{P}$$

$$U = \frac{P}{I} = \sqrt{P \cdot R}$$

Ove jednadžbe povezuju struju, otpor, napon i snagu; ono što je većinom potrebno kada se ljudi strujom koriste. Snaga je jedna od najčešće korištenih veličina i većinom prikazuje na uređajima kojom snagom električni uređaji rade. Primjerice, adapteri na punjačima mogu biti označeni njihovom snagom i time prikazuju snagu kojom pune određeni uređaj za koji su predloženi. S obzirom na snagu punjenja neki od tih uređaja mogu se puniti brže, ako je i snaga punjača veća te uređaj podržava brže punjenje. Mjerna jedinica za snagu je vat i označava se slovom W, iako se češće koriste veće jedinice kao što su kW, to jest kilovati ili MW to jest megavati. Veće se jedinice koriste kod velikih postrojenja kojima je potrebna velika snaga za rad. Osim ovih pojmova koristi se i pojam za električnu energiju. Električna energija označava se s velikim slovom E, a određuje se većinom u kilovat satima s oznakom kWh.

U pravilu pasivni element imaju 3 temeljna svojstva strujnog kruga, a određeni su s obzirom na to kako se koriste s energijom. (Gross, 2012) Ako se energija rasipa, govori se o otporu. Ako se energija sprema u unutarnjem magnetskom polju govorimo o induktivitetu. Ako se energija sprema u unutarnjem električnom polju, govorimo o kapacitetu. Svi pasivni elementi imaju sva tri svojstva, ali moguće je dizajnirati komponentu koja maksimizira jedno a minimizira ostala 2. (Gross, 2012). Ti su elementi otpornik, zavojnica i kondenzator. Kada bi ti elementi bili idealni, otpornik bi imao samo otpor, zavojnica samo induktivitet i kondenzator samo kapacitet, no u stvarnost to nije tako iako se u zadacima ponekad zanemaruju neke od tih veličina.

Otpornici su najčešći elementi bilo kojeg strujnog kruga. Ti su elementi povezani u krug kao zasebni elementi pošto i sama žica kao vodič ima svoj otpor. Otpornici mogu biti različitih vrsta. Prvi primjer otpornika su fiksni otpornici. Ti otpornici su postavljeni na mjestima gdje otpor mora biti konstantan, nepromijenjen. To su najjednostavnija vrsta otpornika. Oni su konstruirani da se njihov otpor ne mijenja te su građeni od ugljikovih kompozita. Većinom su zaštićeni crnom ili smeđom plastikom. Druga vrsta otpornika je varijabilni ili promjenjivi otpornik. Takav otpornik ima kontakt koji se može pomicati te se koristi da bi podesila ili odabrala određena vrsta otpora koja je potrebna. Osim varijabilnih otpornika postoje još i posebni otpornici koji su napravljeni kako bi imali posebnu ulogu u svom radu. Jedan od posebnih i najčešćih otpornika je metalni oksid varistor ili MOV. Ova se vrsta otpornika većinom koristi kao sklopka i služi kao zaštita strojnoga kruga kao i osigurač. Još jedna vrsta specijalnog otpornika je termistor. Termistor je vrsta otpornika koja ovisi o njegovoj temperaturi. Takvi se otpornici koriste u krugovima u kojima je potrebna posebna kontrola kako bi ostali stabilni u radu.

## Slika otpornika

Iako se ohmovim zakonom mogu rješavati različiti strujni krugovi oni se ne mogu potpuno primijeniti na sve slučajeve. Ohmov zakon ima svoja ograničenja u nekoliko različitih primjera. S obzirom na to da su izračuni koji se koriste ohmovim zakonom poprilično jednostavni, tako su i krugovi u kojima se ti izračuni mogu koristiti. U slučajevima u koji su malo kompliciraniji i imaju možda više izvora napona ili se drugačije na napon povezani teško je izračunati struje i ostale veličine koje su možda potrebne. Za te se slučajeve koriste Kirchoffovi zakoni. Ti se zakoni smatraju bazama računanja i analiza strujnih krugova. Prvi Kirchoffov zakon govori o strujama. Prvi Kirchoffov zakon kaže da je zbroj svih struja koje ulaze u neko čvorište jednak zbroju struja koje izlaze iz tog čvorišta. Čvorište je točka u kojoj se povezuje dva ili više elemenata strujnog kruga. Ako gledamo da struje mogu biti različitih predznaka te se spajaju u čvorištu, tada također vrijedi i da je zbroj svih struja koje ulaze u čvorište jednak 0.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 + I_6$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots I_n = 0$$

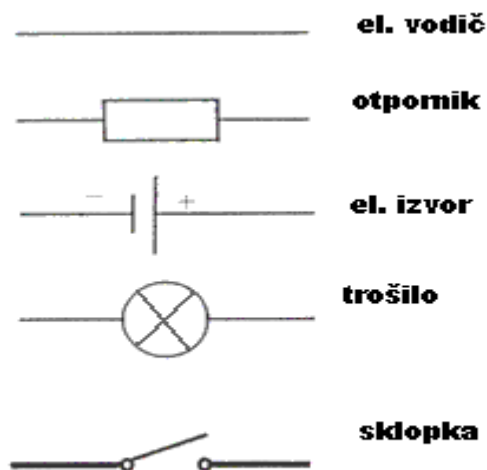
Drugi Kirchoffov zakon govori o naponima i kaže da je napon izvora jednak zbroju svih napona u strujnom krugu. Drugim riječima možemo reći da je zbroj svih napona unutar strujnog kruga jednak 0. Svakoj se struji daje proizvoljan smjer prilikom rješavanja jednadžbi, to jest određivanja veličina unutar strujnog kruga. Kada se računa, uzima se u obzir da je struja na ulazu u otpornik pozitivna za razliku od suprotnog kraja. Ako se prilikom izračuna za tu struju dobije negativan rezultat, znači da je na početku krivo određen smjer te ga je potrebno promijeniti. Prilikom rada sa strujnim krugovima, bili oni povezani u mrežu ili su sami za sebe postavljeni, moraju vrijediti pravila o padu ili usponu napona. Uspon napona događa se ako se gledajući u suprotnom smjeru od toka struje napon na bateriji, generatoru ili otporniku kreće od negativnog prema pozitivnom. Pad napona uočava se kada se gledajući u smjeru toka struje napon na bateriji generatoru ili otporniku kreće od pozitivnog prema negativnom.

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 = U$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 - U = 0$$

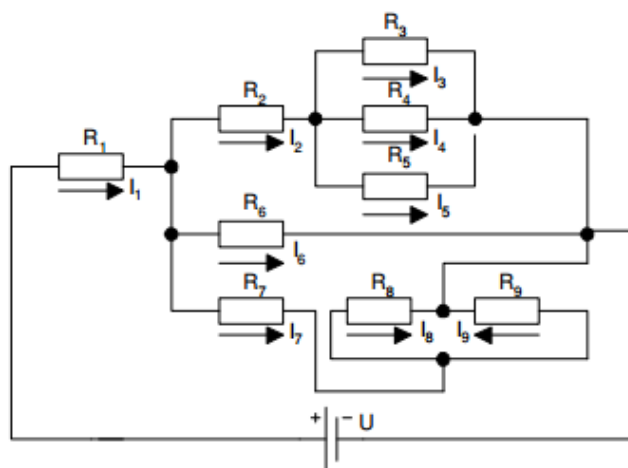
## Primjer računa i rješavanja problema u elektrotehnici

Kirchoffovi zakoni primjenjuju se na većinu strujnih krugova. Kasnije su se razvile i ostale metode koje su svaka na svoj način olakšavale računanje u elektrotehnici. Svaka metoda od tih ima svoj način rješavanja. „Ono što inženjeri rade jest stvaraju idealizirane modele fizičkih sustava, modele na koje se mogu primijeniti zakoni fizike u matematičkom obliku, kako bi se predvidjele performanse idealnih sustava." (Gross & Roppel, 2012) Kada se u elektrotehnici rješava problem odnosno zadatak, taj se zadatak prikazuje shematski te se određuju koji su svi elementi prisutni u tom strujnom krugu. Kako bi se takav primjer mogao razumjeti, potrebno je prvo prikazati osnovne simbole za jedan jednostavan strujni krug. To su simbol žice odnosno vodiča, otpornika, izvora, trošila, sklopke, diode, zavojnice i kondenzatora. Uz njih još postoje mnoge druge komponente koje se koriste u prikazivanju strujnog kruga, ali to ovisi o složenosti određenog kruga.



Kada su poznate osnovne komponente nekog strujnog kruga tada se može prijeći na zadatak.

Zadan je strujni krug prema slici. Potrebno je odrediti napon izvora, sve padove napona i sve struje kroz otpornike ako je struja  $I_2=4$  A,  $R_1=2$   $\Omega$ ,  $R_2=2$   $\Omega$ ,  $R_3=4$   $\Omega$ ,  $R_4=8$   $\Omega$ ,  $R_5=4$   $\Omega$ ,  $R_6=6$   $\Omega$ ,  $R_7=3$   $\Omega$ ,  $R_8=8$   $\Omega$ ,  $R_9=24$   $\Omega$ .



Potrebno je zbrojiti otpornike kako bi dobili jednostavniju shemu u kojoj su serijski spojene  $R_2$  i  $R_{345}$ ,  $R_7$  i  $R_{89}$ , te su međusobno paralelno spojeni s  $R_6$ .

$$\frac{1}{R_{345}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{8}{5}$$

$$R_{345} = \frac{5}{8} = 1,6 \Omega$$

$$R_{89} = \frac{R_8 \times R_9}{R_8 + R_9} = \frac{8 \times 24}{8 + 24} = 6 \Omega$$

$$I_2 = I_{345}$$

$$I_7 = I_{89}$$

Zbroje se otpornici  $R_2$  i  $R_{345}$  i  $R_7$  i  $R_{89}$ , da bi se na tom mjestu dobili samo paralelno spojeni otpornici odnosno  $R_{2345}$ ,  $R_6$  i  $R_{789}$ .

$$R_{2345} = R_2 + R_{345}$$

$$R_{2345} = 2 + 1,6 = 3,6 \Omega$$

$$R_{789} = R_7 + R_{89} = 3 + 6 = 9 \Omega$$

$$I_{23456789} = I_{2345} + I_6 + I_{789}$$

$$U_{2345} = U_6 = U_{789}$$

Ti paralelno spojeni otpornici se zbrajaju da dođe  $R_1$  i  $R_{23456789}$  koji su serijski spojeni.

$$\frac{1}{R_{23456789}} = \frac{1}{R_{2345}} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_{789}} = \frac{1}{3,6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$R_{23456789} = \frac{9}{5} = 1,8 \Omega$$

$$R_{uk} = R_1 + R_{23456789} = 2 + 18 = 3,8 \Omega$$

$$I_1 = I_{23456789} = I$$

$$U = U_1 + U_{23456789}$$

Sada se još ta 2 serijski spojena otpornika zbrajaju kako bi dobili nadomjesni otpor. Na kraju koracima unazad računanjem, mogu se dobiti sve ostale struje i naponi. Svakim korakom unatrag, dobit će se potrebni rezultati.

$$U_1 = I_1 \cdot R_1$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 4 \cdot 2 = 8V$$

$$U_{345} = I_{345} \cdot R_{345} = 4 \cdot 1,6 = 6,4V$$

$$U_{2345} = U_2 + U_{345} = 8 + 6,4 = 14,4V$$

$$U_{2345} = U_6 \quad U_6 = 14,4V$$

$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = \frac{14,4}{6} = 2,4A$$

$$I_{789} = \frac{U_{789}}{R_{789}} = \frac{14,4}{9} = 1,6A$$

$$I_{789} = I_7 = I_{89}$$

$$I_7 = 1,6A$$

$$I_{89} = 1,6A$$

$$U_7 = I_7 \cdot R_7 = 1,6 \cdot 3 = 4,8V$$

$$U_{89} = I_{89} \cdot R_{89} = 1,6 \cdot 6 = 9,6V$$

$$U_{89} = U_8 = U_9$$

$$U_8 = 9,6V$$

$$U_9 = 9,6V$$

$$I_8 = \frac{U_8}{R_8} = \frac{9,6}{8} = 1,2A$$

$$I_9 = \frac{U_9}{R_9} = \frac{9,6}{24} = 0,4A$$

$$U_3 = U_4 = U_5 = U_{345}$$

$$U_3 = 6,4V$$

$$U_4 = 6,4V$$

$$U_5 = 6,4V$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{6,4}{4} = 1,6A$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{6,4}{8} = 0,8A$$

$$I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{6,4}{4} = 1,6A$$

$$U_{23456789} = U_2 + U_{345} = U_6 = U_7 + U_{89} = 14,4V$$

$$U = U_1 + U_{23456789} = 16 + 14,4 = 30V$$

$$I_{23456789} = I_{23456789} + I_6 + I_{789} = 4 + 2,4 + 1,6 = 8A$$

$$I_{23456789} = I_1$$

$$I_1 = 8A$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 8 \cdot 2 = 16V$$

Rješavanjem ovog problema iz elektrotehnike, zapravo se dobiva pojednostavljen sustav za razliku od početnog koji je bio kompliciran. Naime, od sustava koji je imao nekoliko komponenata, u ovom slučaju otpornika, napravio se sustav koji ima samo jedna otpornik i time je taj sustav postao mnogo jednostavniji.

Naravno, može se s time i uzeti u obzir ako se želi koja od komponenta unutar ovog sustava zamijeniti, ovim se računom došlo do vrijednosti koje ta komponenta mora imati da bi sustav ostao nepromijenjen. Ovaj je sustav, iako izgledom kompliciran, zapravo jedan jednostavan koji se sastoji od više komponenata ili otpornika koji su a različite načine spojeni. U obzir se prilikom računa nisu uzimali mogući gubitci niti vrijeme rada ovakvog sustava jer bi na taj način sustav postao kompliciraniji. Kada bi se samo vrijeme uzimalo u obzir, sustav bi trebalo modelirati kao sustav koji se s vremenom mijenja.



## Mehanika

Kao što je već navedeno, strojevi su izumljeni kako bi olakšali rad koji čovjek treba obaviti. Stroj, kako bi obavio zadani zadatak, treba dobiti naredbu. Te naredbe dolaze od strane računala koji tim strojem upravlja. No, i to računalo mora biti nekako pokrenuto. Iako su računala poprilično napredna i mogu obavljati jako veliki broj operacija u kratkom vremenu, to računalo i dalje ne zna koji je zadatak potrebno obaviti ukoliko to čovjek ne prikaže. Sve te matematičke operacije, izmjene i obrade podataka, obrađivanje jedinica i nula mogu obavljati jako velike količine zadataka no ne mogu odrediti koji je zadatak potrebno obaviti. Za to je potreban čovjek. Čovjek je potreban da bi dao input računalu koje tada daje zadatak koji će stroj obaviti. Ali, za čak i najjednostavniji zadatak kao što je primjerice pomaknuti predmet s jednog mjesta na drugi potrebno je dati računalu točno određene podatke. Stroj na kraju samo izvrši rad koji mu je zadan no prije toga potrebno je odrediti puno više faktora koji su potrebni da se taj zadatak obavi i da od njega ima koristi.

Prilikom i najjednostavnijeg rada kao što je pomaknuti tijelo s jednog mjesta na drugo, treba uzeti u obzir da na to tijelo djeluju neke sile čak i dok to tijelo miruje. Upravo se time bavi mehanika. Mehanika je grana fizike koja se bavi proučavanjem najjednostavnijih oblika gibanja materije ili promjene položaja materijalnih tijela u prostoru ovisno o vremenu. Kako bi se neko tijelo pomaknulo odnosno promijenilo položaj potrebno je da na njega djeluje neka vanjska sila tako da se mehanika također bavi i silama koje utječu na tijela te njihovom ravnotežom. U mehanici djeluju četiri osnovna pojma to su vrijeme, prostor, masa, i sila. Mehanika se primarno bavi određivanjem zakonitosti i poučaka proučavanjem gibanja tijela i koristeći se matematičkim sredstvima kako bi se te pojave i zakonitosti objasnile. Ta se mehanika naziva teorijska mehanika dok se mehanika u kojoj se te zakonitosti i pojave primjenjuju u tehnici koja se naziva tehnička ili primijenjena mehanika. Mehanika se temelji na logici i matematici kojima se pokušava prikazati što bolje zakoni gibanja i ravnoteže u stvarnoj prirodi. Mehanika ima široku primjenu u mnogim znanostima jer pomaže pri rješavanju mnogih tehničkih problema. Od proračuna u projektiranju i gradnji građevina pa do izrada strojeva, mehanizma i prijevoznih vozila, kako bi sve to bilo moguće, potrebni su mehanički proračuni.

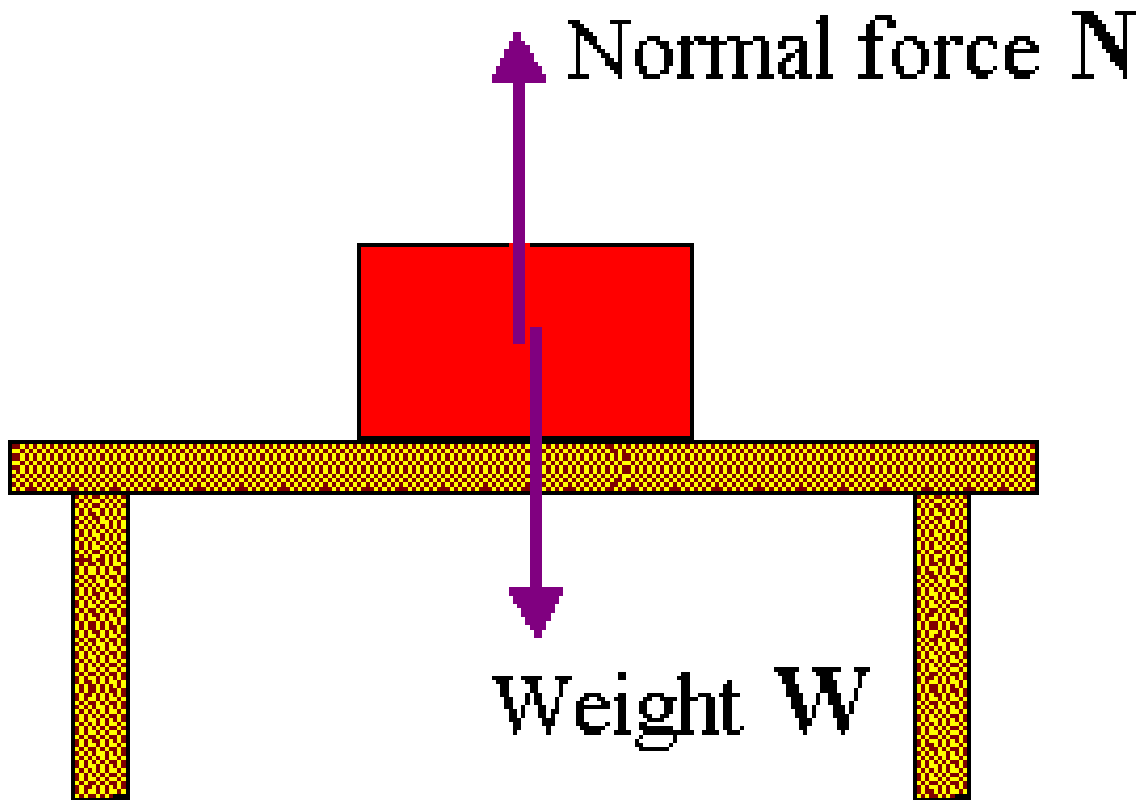
Iako se mehanika dalje grana na još mnogo drugih podvrsta koje se bave proučavanjem različitih drugih vrsta mehanika u različitim znanostima danas se

najčešće koristi mehanika čvrstog tijela. Mehanika čvrstog tijela dijeli se na 3 razine statiku, kinematiku i dinamiku. Statika u mehanici proučava stanja ravnoteže i mirovanje kao posebnu vrstu gibanja. Glavne komponente u statici su prostor i sila. Kinematika se bavi proučavanjem tijela u gibanju bez obzira na to što je to gibanje potaknulo. To se gibanje promatra u odnosu na posebno zadane geometrijske uvijete u određenom vremenu. Iz tog su razloga glavne komponente u kinematici prostor i vrijeme. Dinamika se u mehanici bavi zavisnošću između tijela u gibanju i sile koje utječu na to tijelo u odnosu na njegovu masu, prostor i vrijeme. Glavne komponente u dinamici su sile i masa.

## Mehanički rad

Primijenjena mehanika bavi se proučavanjem gibanja tijela (ili u statici promatra mirovanje kao posebnu vrstu gibanja) i izračunima kako bi uspjeli sve te sustave dovesti u ravnotežu i tako ih moći objasniti. Nakon što se mogu objasniti i dovesti u ravnotežu, ti se sustavi tada mogu iskoristiti u mnoge svrhe. Na taj način, primijenjena mehanika nastoji korisno primijeniti te sustave u svakodnevnom životu i tako ga olakšati. Matematičkim izračunima u mehanici određuje se kako dovesti sustav u ravnotežu iako na njega djeluju vanjske sile. U fizici, rad se označava kao umnožak sile i pomaka, odnosno neko je tijelo obavilo rad ako je sila koja je djelovala na njega pomaknula to tijelo. Uzme li se neki sustav na njega djeluju sile. Ako promatramo neko tijelo u mirovanju, na njega također djeluju sile. Između faktora u sustavu treba se razmotriti strukturalna izvedba sustava i njegova sposobnost da izdrži određeni teret. (Stroud Rossman, Dym, 2008)

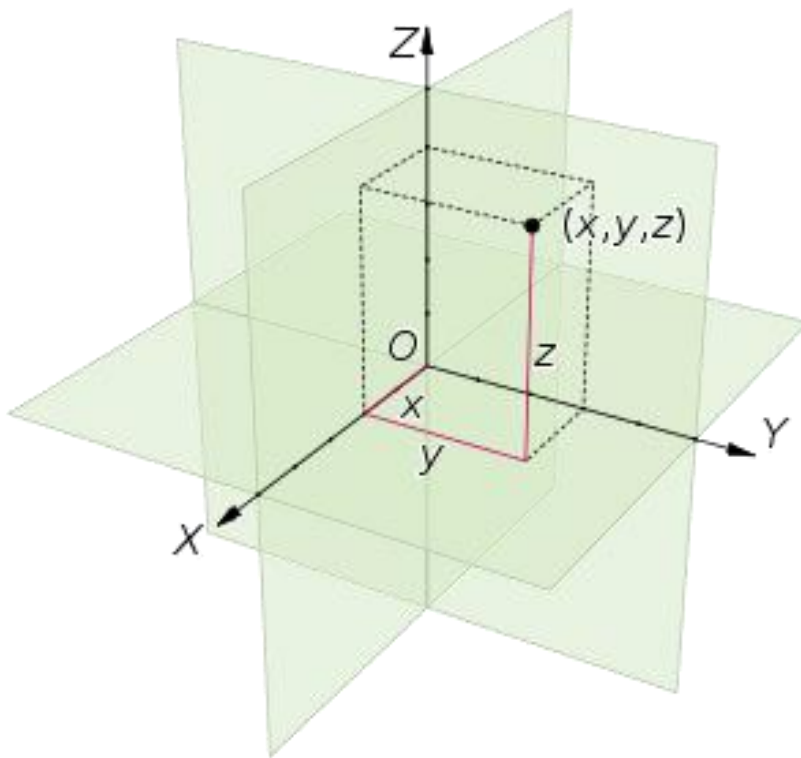
Uzima se na primjer kutija postavljena na stol. Ako se promatra ta kutija, ona je u stanju mirovanja. Nema gibanja. Ako se za definiciju rada uzme, kao što je u fizici rečeno, da je rad obavljen ako je sila obavila neki pomak, reklo bi se da u ovom sustavu kutije i stola nema rada. No, gleda li se to tako stol ne obavlja nikakav rad, odnosno to što je kutija na njemu, nema nikakav učinak na taj stol. Kutija ima neku svoju težinu i tom težinom kutija djeluje na stol. Ta se težina prikazuje u obliku sile koja djeluje okomito na stol. Ukoliko stol ne odrađuje nikakav rad tada bi kutija trebala propasti kroz taj stol odnosno razbiti ga. No stol se odupire težini kutije drugom silom koja se naziva normalna sila. Normalna sila je komponenta okomita na površinu koja se koristi kako bi se objasnilo da površina na koju je neki predmet postavljen, sprječava da taj predmet padne ili propadne kroz tu površinu. Normalna sila postoji samo u slučajevima u kojima ima kontakta između nekog predmeta ili površine. „Unutarnje sile su sile distribucije ili rezultante potrebne da se održi unutarnji sklad" (Rossman i dr., 2015). Znači, iako na stol djeluje kutija svojom težinom, normalna sila stola onemogućava toj kutiji da padne odnosno propadne kroz stol. Prilikom proučavanja ovog sustava valja shvatiti da čak i u slučaju u kojem je sustav u stanju mirovanja, taj sustav ipak može obavljati neki rad. Upravo je to posebna vrsta gibanja koju proučava statika.



*Slika 7: Prikaz utjecaja djelovanja predmeta na stol*

Ako neka sila ili više njih djeluje na neko tijelo i pomakne ga, kažemo da su te sile obavile nekakav rad. No, kao što je bilo prikazano u primjeru, u sustavu koji miruje također postoje sile koje djeluju na tijelo i iako se to tijelo, u ovom slučaju kutija, nije pomaknulo te su sile ipak obavile neki rad. Razlika leži u tome da su ove dvije sile bile jednake veličine. Sila koju proizlazi iz težine kojom kutija djeluje na stol jednake je veličine, ali suprotnog smjera, kao i normalna sila kojom stol djeluje na kutiju i sprječava ju da padne. Na taj način sustav je u ravnoteži, te iz tog razloga nema pomaka, a kutija i stol su u mirovanju. Iz toga se ne može reći da su te sile obavile nekakav pravi rad s obzirom na to da nije bilo pomaka. Zato se uzima u obzir da se pod djelovanjem tih sila dogodio neki mali pomak koji se ne može izmjeriti. U tom slučaju taj se pomak naziva virtualni pomak, a obavljen rad naziva se virtualni rad. Kako bi se taj sustav sila koje djeluju na neko tijelo ili površinu mogli izračunati ili odrediti što je potrebno u nekim znanostima ili zanimanjima, uvodi se takav virtualni rad. Taj virtualni rad postiže se putem određenog pravila. Kako bi nastao virtualni rad potrebno je da se sve sile koje djeluju na tijelo ili površinu se poništavaju, odnosno postižu ravnotežu. Ta se ravnoteža postiže ako je zbroj svih sila koje djeluju na tijelo

jednak nuli. Pošto se na tijelo ili površinu može djelovati iz tri različite osi nastaje pravilo da zbrojevi svih sila na tim osima budu jednaki nuli.



Slika 8: 3D prikaz rasporeda sila u prostoru

$$\sum x = 0$$

$$\sum y = 0$$

$$\sum z = 0$$

No, ne djeluju sve sile u istoj točki niti su sve sile položene direktno na jedan od tih pravca koordinatnog sustava. Ako sve sile djeluju u jednoj točki one se sve mogu zbrojiti u jednu rezultatnu silu, zbrajanjem vektora, pošto sve te sile imaju svoju veličinu, smjer i orijentaciju. S obzirom na to, te se sile koje djeluju u prostoru mogu međusobno zbrajati u jednu rezultatnu silu ili jedna po jedna projicirati na zadanu os. Suma svih tih projekcija ili translacija sila jednaka je veličini rezultatne sile koja djeluje na toj osi. Za svaku pojedinu silu računamo:

$$F_x = F \cos \alpha, F_y = F \sin \alpha$$

Odnosno za rezultatnu silu nakon zbrajanja svih sila u rezultatnu:

$$F_{Rx} = F_R \cos \alpha, F_{Ry} = F_R \sin \alpha$$

Ako sile ne djeluju u istoj točki također se mogu translirati na glavne pravce koordinatnog sustava. Pri tome, koristi se istim postupkom kao i u prethodnom slučaju gdje sile potječu iz jedne točke. Ako bi se htjelo sve te sile zbrojiti u jednu rezultatnu potrebno je uvrstiti novi način rada, odnosno nove vrste izračuna. Novi način odnosi se na to da se uvrsti nova točka koja će spajati sve početke i krajeve vektora koji se u tu rezultatnu spajaju. Ti početci i krajevi svih vektora jednako su udaljeni od proizvoljno odabrane točke. Nakon što se svi ti vektori povežu s točkom, povlači se rezultatni vektor koji polazi od početne točke prvog do krajnje točke posljednjeg vektora.

Osim što na tijelo djeluju sile također djeluje i moment sile ili zaokretni moment. Moment sile je vektorska veličina koja ima sličnu ulogu kao i obična sila, ali djeluje prilikom rotacije tijela i nastoji to tijelo zarotirati odnosno ne djeluje na njega kao i druge sile. Pošto se rotacija nekog tijela odvija oko neke točke tada ta rotacija ne može prikazati pomak. U slučaju da se neko tijelo zarotira oko svoje osi u tom slučaju pomaka ne bi bilo s obzirom na to da se krajnja točka tijela nije udaljila od središta tijela već je samo opisala kružnicu oko njega. U tom slučaju rad nije obavila sila, već moment sile koji je nastojao to tijelo zarotirati. Moment sile prikazuje se vektorski jer je određen smjerom i veličinom. Dobije se umnoškom sile i udaljenosti pravca njezinog djelovanja od osi ili točke prema kojoj taj moment djeluje.

$$M = F \cdot a$$

Moment, kao i ostale sile koje djeluju na tijelo nastoji se održati u ravnoteži. Tako da kao i u ostalim slučajevima gdje djeluju sile na neko tijelo kako bi to tijelo ili površina bili u ravnoteži, potrebno je i sumu, odnosno zbroj svih momenata svesti na nulu. No, kao i kod ostalih sila potrebno je izjednačiti sve momente u prostoru, to jest momente koji djeluju na svim trima koordinatnim osima. Iz toga se mora primijeniti pravilo da se suma momenata na bilo kojoj od osi izjednači s nulom.

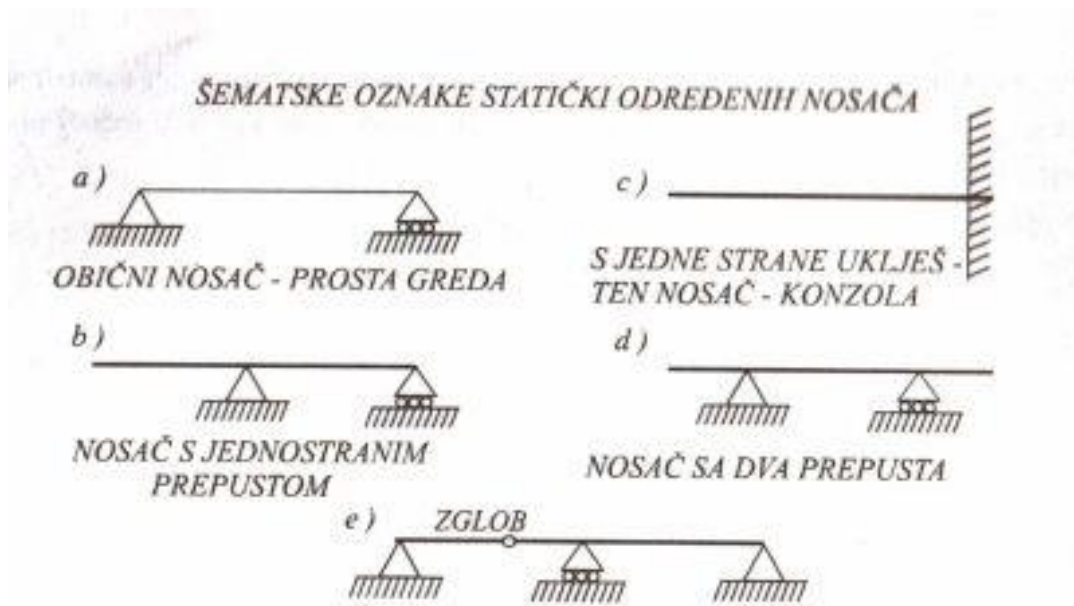
$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Na taj se način pokušava uravnotežiti sve sile i momenti koje se nalaze u sustavu sila. Primijeni li se to na slučaj kutije koja je na stolu, kako bi taj stol izdržao, potrebno je sve te sile ili uravnotežiti ili povećati u našem slučaju noge stola kako bi taj stol mogao izdržati težinu kutije.

Postavljanje predmeta i uravnoteživanje sila na površinama jedna je od primarnih i glavnih dijelova kojima se bavi statika u mehanici. U mehanici, površine na koje djeluju sile uzimaju se kao različite vrste nosača ovisno o tome kako su postavljene. Nosačima se nazivaju konstrukcijski nosivi sklop koji prijenosi opterećenje preko jednog ili više raspورا na ležaje. Stol koji je ranije korišten također se u mehanici prikazuje kao nosač s obzirom na to da prenosi opterećenje kutije na ležajeve odnosno u ovom slučaju noge stola. Nosači mogu biti s prepustima ili bez njih te mogu biti linijski ili plošni. Građevni nosač ili greda je konstrukcija koja se gleda u jednoj ravnini i oslonjena je na krajevima s jedne strane pomično s druge strane nepomično. Postoje još i ukliještene grede te grede s prepustom i grede sa zglobovima. Grede su većinom opterećene transverzalnim silama, tj. onima okomitima na gredu i momentima a rijetko aksijalnim silama i onima izvan svoje ravnine.



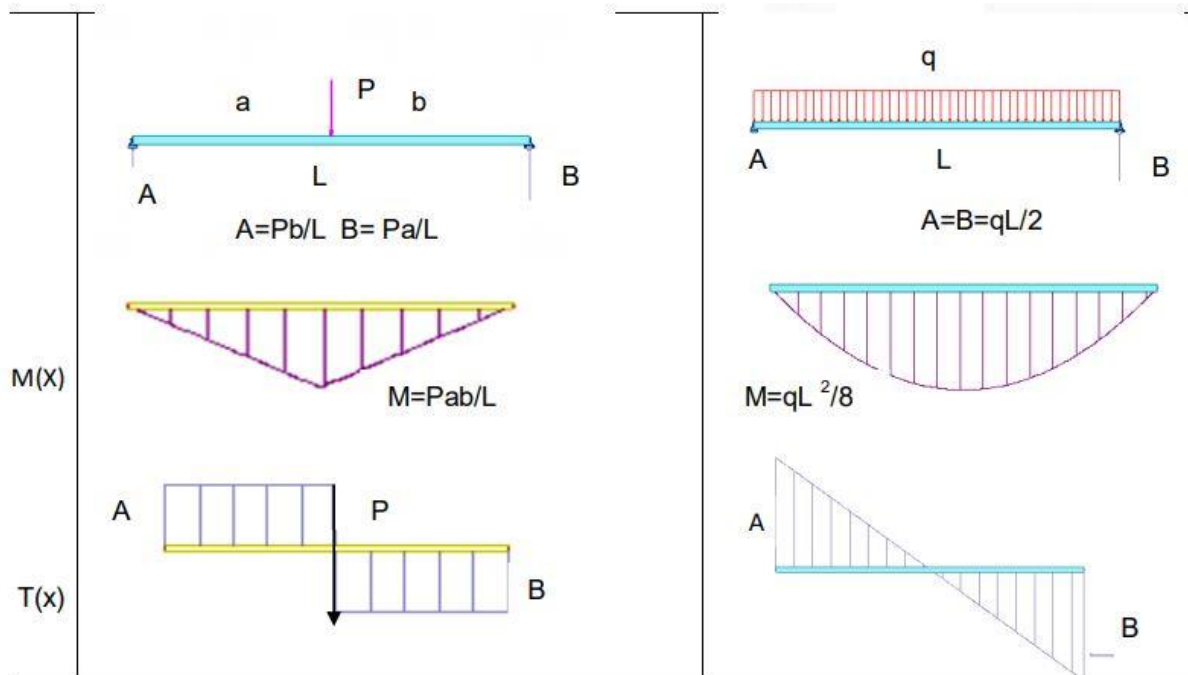
Slika 9: Vrste nosača

Nosači se nalaze posvuda te ih je potrebno dobro izračunati i odrediti. U građevini i bilo kakvim vrstama konstrukcija grede su potpuno neophodne. Većine greda prikazane su kao obični nosači koji se i najčešće koriste no također su dosta česti i uklještteni nosači. Postoje načini na koji se to određuje i naravno za to nam je potrebna matematika.

Kada se gleda primjer stola s kutijom, naša je sila težine kutije postavljena u centru kutije odnosno njenom težištu. Težište je točka u kojoj djeluje rezultantna sila svih sila koje djeluju na neko tijelo. Kada se neko tijelo podijeli na veliki broj malih dijelova, svaki od njih ima svoju težinu, odnosno silu koja djeluje na njih. Rezultanta svih tih sila nalazi se u težištu tog tijela. Bez obzira na to na koji se smjer tijelo okrene ili pomakne, rezultantna sila uvijek se nalazi u težištu tog tijela. Kod pravilnih tijela, odnosno onima koji imaju ista mehanička svojstva u svim točkama, težište se nalazi u istoj točki kao i njihovo težište volumena. Iako svako tijelo ima svoje težište, ono postavljeno na neku površinu djeluje cijelom svojom duljinom. Ako je naša kutija postavljena na stol, ona djeluje na taj stol cijelom svojom dužinom.



## Primjer računa i rješavanja problema u mehanici

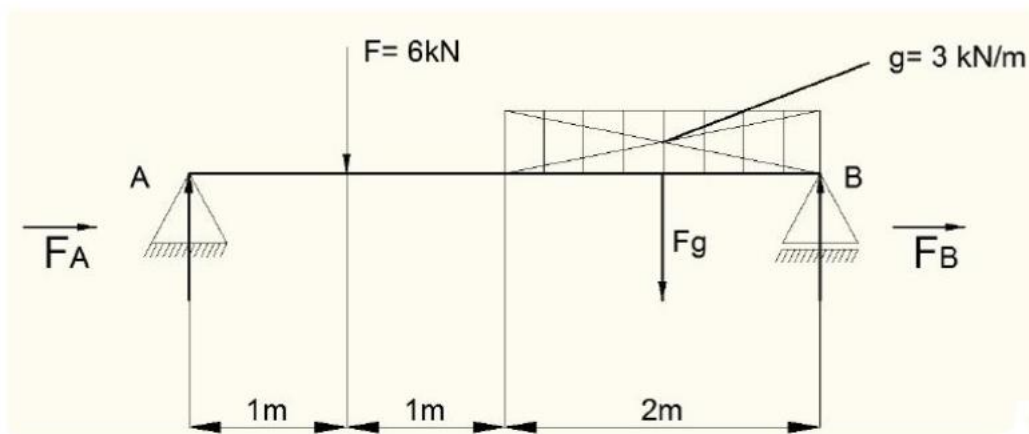


Slika 10: Graf prikazuje naprezanje nosača nakon što je na njega postavljen predmet

Na slici je prikazan primjer sile koje utječu na neku gredu. Pošto sile djeluju na gredu, greda je opterećena na savijanje te se to prikazuje na dijagramima. U lijevom dijagramu momenata savijanja  $M(x)$  prikazano je kako sila koja djeluje na nosač ima prikaz trokuta zbog djelovanja sile samo u središnjem dijelu nosača te se nosač savija u obliku trokuta jer se naprezanje nalazi samo u središtu, a ostatak grede nastoji održati svoj primarni oblik. U drugom slučaju, s desne strane, dijagram momenata savijanja  $M(x)$  ima oblik parabole iz razloga što sile djeluju u cijeloj duljini grede. To je slučaj u kojem te sile predstavljaju jedan predmet. Predmet je pravilan kao u ovom slučaju te sile imaju sve jednaka mehanička svojstva i djeluje jednakom veličinom na cijelu gredu. No, greda ima dva ležaja koja na krajevima preuzimaju opterećenje te se prema njima savijanje smanjuje. Na taj način dijagram savijanja preuzima oblik parabole pošto se udaljava od težišta predmeta, gdje je savijanje najjače i bliži se ležajevima jačina tih sila se smanjuje. U drugom slučaju gdje se prikazuje dijagram poprečnih sila  $T(x)$  s lijeve strane prikazuje se skok na mjestu djelovanja koncentrirane sile u iznosu veličine te sile. S desne strane, pošto je riječ o predmetu koji je položen na gredu, djelovanje se prikazuje pri krajevima gdje je koncentracija poprečnih sila veća, odnosno povećava se prema krajevima. Pošto se dijagram poprečnih sila dobiva derivacijom dijagrama savijanja, iz tog se razloga

može odrediti oblik tih dijagrama. U prvom lijevom primjeru dijagram momenta savijanja ima linearan oblik te iz njega može zaključiti da će dijagram poprečnih sila biti konstantan duž cijelog djelovanja sile i s obzirom na rotaciju mijenja se njegov smjer dok veličina ostaje ista. U drugom desnom slučaju, pošto je dijagram momenta savijanja parabola, njegova prva derivacija je linearna funkcija te se zbog toga dobiva oblik trokuta koji se, naravno, s obzirom na rotaciju mijenja. Ove sve funkcije i računanja potrebna su da bi se moglo odrediti koliko će naprezanje na nekoj gredi biti kako bi se greda mogla pravilno učvrstiti i izdržati opterećenje koje je za nju predviđeno.

Kao primjer koristit će se prikaz grede s osloncima na koju djeluju određene sile. Potrebno je odrediti reakcije u osloncima kako bi sustav bio stabilan.



Kako bi sustav bio stabilan, moraju se izjednačiti sve sile koje na taj sustav utječu, a to se postiže na sljedeći način:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

Uvrštavaju se sve sile koje djeluju u tim pravcima:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \text{ne djeluju sile u ovo slučaj}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_A - F - F_g + F_B = 0$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow F_A \cdot 4 - F \cdot 3 + F_g \cdot 1 = 0$$

Pošto su u drugoj jednadžbi poznate sve veličine, iz nje će se izlučiti  $F_A$ :

$$F_A = \frac{F \cdot 3 + F_g \cdot 1}{4} = \frac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{4} = \frac{18 + 6}{4} = \frac{24}{4} = 6KN$$

Nakon što je dobivena veličina za  $F_A$  i poznata je reakcija u osloncu A, ta se veličina može uvrstiti u prvu jednadžbu kako bi se dobila reakcija oslonca B:

$$F_A - F - F_g + F_B = 0 \rightarrow F_B = -F_A + F + F_g$$

$$F_B = -6 + 6 + 6$$

$$F_B = 6KN$$

Ovim riješenim zadatkom postiglo se da je sustav u ravnoteži. Ovim se modelom odredilo koje sile utječu i koje su sile potrebne u ovom slučaju gdje je sustav statičan. No, mehanika se bavi i dinamičkim sustavima koji se mogu i automatizirati, te taj sustav može obavljati neki rad. Za takav sustav potrebno je više varijabli i složeniji način matematičkog modeliranja.

## Automatizacija

Tehnika, tehnologija, elektrotehnika i mehanika međusobno su povezane jer se oslanjaju jedna na drugu kako bi mogli obaviti neki rad. Tehnika su znanja i vještine potrebne za obaviti neki rad, tehnologija je povezivanje tih znanja i vještina s uređajima i alatima, mehanika su izračuni koji su potrebni kako bi se taj rad mogao obaviti i kako bi sustav nakon što je rad obavljen bio u ravnoteži i elektrotehnika koja omogućava da se stvori potreban strujni krug kako bi taj stroj mogao obaviti taj rad. Ali, za sve to još uvijek je potrebna velika umiješanost čovjeka kao bi se taj rad obavio. Ovdje je gdje se uvodi automatizacija. Automatizacija je tehnologija kojoj je za odraditi neki proces ili rad potrebna minimalna ljudska pomoć. Automatizacija ima velike primjene od jednostavne kućne uporabe pa sve do velikih industrijskih pogona. Može se koristiti jednostavno za uključivanje ili isključivanje nekog uređaja pa čak do upravljanja multi varijabilnih algoritama visokih razina. Za najjednostavnije automatizacijske petlje, kontroler uspoređuje izmjerenu vrijednost sa željenom vrijednosti i obrađuje signal pogreške te mijenja neki ulaz u proces kako bi on mogao ostati u postavljenoj vrijednosti unatoč smetnjama. Automatizacija se postiže koristeći različite uređaje i računala većinom u kombinaciji.

Automatizacija i automatska regulacija su pojmovi koji nisu isti ali su međusobno bliski i povezani. Za automatizaciju je potrebna minimalna ljudska pomoć, odnosno to je proces u kojem se nešto odvija automatski. Kako bi se automatizacija mogla sprovesti, potrebno je da je proces koji se automatizira dovoljno mehaniziran. Automatska regulacija je automatsko održavanje određenog stanja po nekom zadanom pravilu, bez obzira na vanjske ili unutarnje smetnje.

Postoje dvije osnovne vrste upravljanja u automatizaciji: upravljanje otvorenom petljom i kontrola povratne veze sa zatvorenom petljom. Sustav s otvorenom petljom radi na principu kontrolnog djelovanja regulatora i ne ovisi o izlazu iz procesa odnosno povratnoj vezi. Takav regulator ima fiksirani proces koji se uključuje i isključuje koji većinom ovisi o tajmeru koji vremenski određuje koliko će proces trajati. U zatvorenom krugu upravljanje ovisi o izlazu iz procesa. U takvom se slučaju kontrolira izlaz i šalje povratna informacija u regulator koji tada radi promjenu ili uključuje, to jest isključuje proces, ovisno o tome je li na izlazu željena vrijednost. Dakle, regulator u zatvorenom krugu ima sustav povratne sprege koji osigurava da regulator izvrši radnju te da izlaz iz procesa bude jednak zadanoj vrijednosti. To je

razlog zašto se ti kontrolori i zovu kontrolori povratne informacije. Pojednostavljeno, na početku procesa je zadana određena vrijednost te ulazi u proces. Taj se proces odrađuje te na izlazu pomoću povratne veze uspoređuje se s ulaznom vrijednošću koja je zadana kako bi se na kraju ispravnica dobilo željeno stanje.

U slučaju kada se upravlja otvorenom petljom govori se o upravljanju. Upravljanje je proces u kojem jedna ili više ulaznih veličina utječu na jednu ili više izlaznih veličina prema zakonitostima koje su postavljene u tom procesu. To govori da u upravljanju nema povratne veze, već se s obzirom na promjene u ulazu u proces mijenjaju izlazne veličine.

Povratna veza jako je važna za automatsku regulaciju i za automatizaciju. Povratna veza ima velike prednosti u tim procesima. Primjerice, proces koji koristi povratu vezu je stabilniji i postaje otporan na vanjske i unutarnje podražaje. Proces koji ima nekoliko loših sastavnica od kojih je sastavljen, može davati dobre rezultate. Nestabilan proces se uz pomoć povratne veze može stabilizirati, te se može postaviti neko željeno stanje u proces koje bez povratne veze ne bi bilo moguće. Ali kao i u svim slučajevima povratna veza ima i svoje negativne strane. Jedan od glavnih nedostataka je to što sustav ako nije dobro namješten, može postati nestabilan odnosno oscilirajući, što niti u jednom slučaju nije poželjno. Moguće je da sustav, iako je stabilan, ako nije dobro postavljen, postane oscilirajući. U sustavu koji se upravlja, ako su elementi stabilni, onda je i sustav stabilan, ali kod regulacije taj se sustav mora doradivati što dovodi i do većih troškova. No, na kraju, ako sustav funkcionira, poželjno je da se tada taj trošak isplati. Uzimajući to u obzir, primjećuje se da je zapravo vrlo bitna stabilnost za bilo koju vrstu sustava, ali kako ćemo definirati stabilnost? Stabilnost sustava ćemo definirati kao ograničen broj odaziva na broj pobuda. To znači da će nestabilan sustav imati neograničen broj odaziva na ograničen broj pobuda. Govoreći o ograničenjima, valja spomenuti i ograničenja koja ima povratna veza. Povratna veza sama po sebi nema ograničenja, nego se ta ograničenja odnose na hardverske elemente unutar sustava. Primjerice ograničenja donose mjerni uređaji koji imaju vrijeme kašnjenja potrebno da obrade podatke koje su zaprimili, te tako ograničavaju brzinu kojom se neki proces može odrađivati.

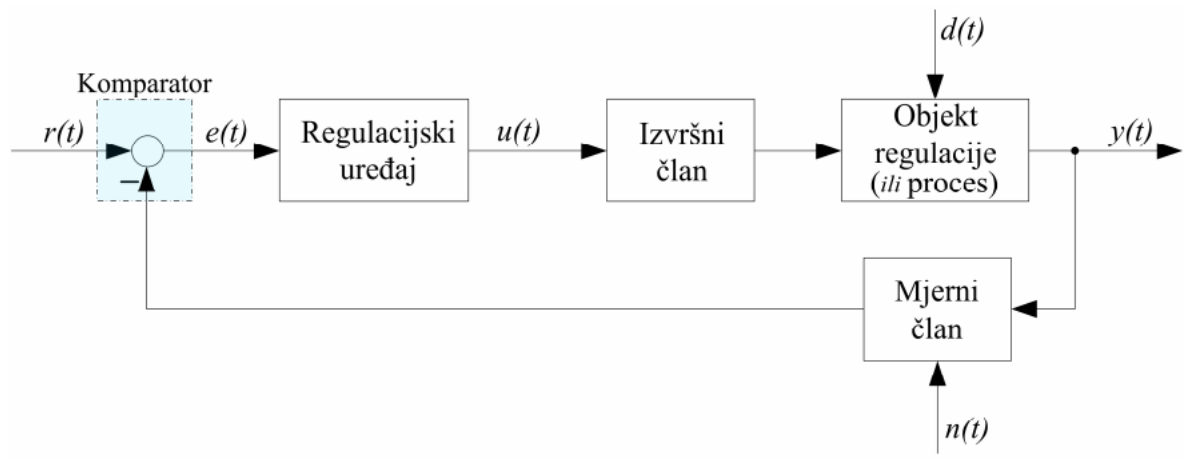
Kako bi vodili neki sustav, odnosno proces, treba ga dobro poznavati. Vođenje podrazumijeva i upravljanje procesom i reguliranje tog procesa. Što se više jedinica

odnosno varijabli koje utječu na proces poznaže, to je veća mogućnost da će se sustav bolje i lakše voditi. Poznavajući njegove mane i najslabije točke, lako se može pokušati predvidjeti u kojem dijelu bi proces mogao pogriješiti te se osigurati da se to ne dogodi. Za takav postupak potrebni su matematički modeli. Pomoću tih matematičkih modela mi zapravo opisujemo sustav što je jednostavnije moguće kako bi ga kasnije mogli sprovesti u djelo. Svaki sustav ili proces ima bazu na matematičkom modelu. Ovisno o složenosti sustava, ovisi i složenost matematičkog modela. Naravno matematičkim se modelima mogu predstaviti određeni dijelovi procesa, ali ne svi. Matematički model nastoji pojednostaviti svaki proces kako bi se proces mogao lakše implementirati u stvarnosti. Za odrediti koliki je dio procesa potrebno modelirati, složeni je zadatak. Potrebno je dovoljno složeno opisati matematički model kako bi bio što jednostavnije i bolje prikazan, te bolje predstavlja stvarni sustav koji se opisuje. No, opet s druge strane, potrebno ga je također dovoljno jednostavno prikazati kako bi se lakše mogao analizirati sustav, kako bi se lakše mogle vidjeti karakteristike sustava i promijeniti one koje je potrebno, te je takve modele lakše implementirati u računalne sustave koji pomažu pri simulaciji cijelog procesa. Ako se i više ljudi bave određenim procesom, računalo je jedno od najboljih načina komuniciranja među svima njima. Osim komunikacije, simulacija je jako bitna za proces. Ona i modeliranje jako su usko povezani. Iako je modeliranje postojalo i ranije, tek se pojavom računala potpuno mogao prikazati potpuni potencijal matematičkih modela. Danas se pomoću modeliranja i različitih simulacija na računalu mogu mnogo lakše modelirati, analizirati i voditi različiti sustavi.

## Blok dijagrami

Sustavi koji se modeliraju i simuliraju i kojima treba mnogo pažnje su dinamički sustavi. Takvim sustavima potrebno je dobro vođenje zbog različitih varijabli koje su promjenjive u takvim sustavima. Postoje dva načina na koje se takvim sustavima pristupa, a to su pristup po toku energije i pristup po toku signala. Kada se modelira po toku energije, tada se fizički prikazuju elementi unutar modela i njihova povezanost, no pritom se ne gleda je li im je to ulazna ili izlazna varijabla s obzirom na to da jedna element utječe na drugi neovisno o ulazu ili izlazu. Ako je protok energije među njima omogućen, oni će uspješno prikazivati rad sustava. Kada se radi o modeliranju po toku signala, tada je potrebno odrediti ulaze i izlaze jer su neophodni za prikazivanje rada sustava. On ne prikazuje fizičku strukturu sustava, već matematičku. Jedan od primjera kako se modelira po toku signala su blok dijagrami. Naime, u blok dijagramima ne utječe svaki blok na prethodni već se taj utjecaj prikazuje povratnom vezom.

Blok dijagram je sustav grafičkih simbola kojima se jasno prikazuju sustavi automatske regulacije, ali i same automatizacije. Blok dijagram prvi je korak u matematičkoj analizi. U njemu se pomoću različitih simbola prikazuje ovisnost među elementima te oni ne ovise o strogim matematičkim pravilima, već se prikazuju na funkcionalan i slikovit način. Prilikom sastavljanja takvog bloka dijagrama, poštuju se određena pravila koja i simboli. Strjelica predstavlja signal, odnosno fizikalnu veličinu te njen smjer u kojem se kreće i mijenja se s vremenom. Blok predstavlja funkcionalnost među signalima. Oni signali koji ulaze u blok, tj. ulazne varijable, prolaze kroz određeni proces te izlaze iz bloka i postaju izlaze varijable. Krug predstavlja točku gdje se signali zbrajaju ili komparator. Čvorište predstavlja točku gdje se signali odvajaju na različite grane no svi i dalje imaju jednaku vrijednost. Na slici je prikazan osnovni blok dijagram.



Slika 11: Blok dijagram

Da bi se moglo shvatiti što sve opisuje jedan osnovni blok dijagram, potrebno je znati pročitati i razumjeti sve referentne veličine koje su zapisane u dijagramu.

U početku imamo referentnu veličinu koja nam predstavlja ulaznu veličinu u komparator. Referentna veličina je željena veličina koju želimo da proces postigne. Prikazana je simbolom  $r(t)$ . Regulirana veličina predstavlja izlaznu veličinu iz procesa i često se naziva samo izlaz. Simbol joj je  $y(t)$ . Regulacijsko odstupanje je razlika između ulazne i izlazne veličine. Ona ulazi u regulacijski uređaj i potiče njegov rad. Simbol koji prikazuje regulacijsko odstupanje je  $e(t)$ . Sljedeća je postavna veličina zapravo produkt koji izlazi iz regulacijskog uređaja te ulaz u proces. Oznaka je  $u(t)$ . Posljednje, imamo poremećajnu veličinu. To je signal koji ima negativan utjecaj na reguliranu veličinu. Poremećajne veličine mogu biti različitih oblika te dolaziti iz različitih smjerova u različite dijelove procesa. One predstavljaju bilo kakav poremećaj koji može izbaciti sustav iz ravnoteže. Simbol takve veličine je  $d(t)$ .

Nakon signala, treba objasniti i pojedine uređaje unutar sustava. Regulacijski uređaj je dio sustava koji postavlja, odnosno regulira postavnu veličinu koje će tada dalje ići u proces. On većinom sadrži više dijelova koji mu pomažu pri prepoznavanju i obradi signala. Objekt regulacije ili proces predstavlja proces sustav ili bilo koji dio sustava koji je predmet regulacije. Objekt regulacije može imati više podregulacija koje se zovu regulacijske staze. One se odnose na manje dijelove koji se mogu regulirati unutar regulacijskog objekta ovisno o tome koje veličine želimo regulirati. Komparator služi pri usporedbi željene i stvarne vrijednosti. U tom slučaju prirodno je da povratna veza ima negativnu vrijednost. Vrijednost pozitivne povratne veze mogla



bi prouzročiti nestabilnost cijelog sustava. Za pozitivnu povratnu vezu se treba proizvesti poseban sustav koji se koristi u određenim slučajevima. Mjerni šum označava pogrešku u mjerenju. Može postojati u većoj ili manjoj mjeri. Označen je sa  $n(t)$ .

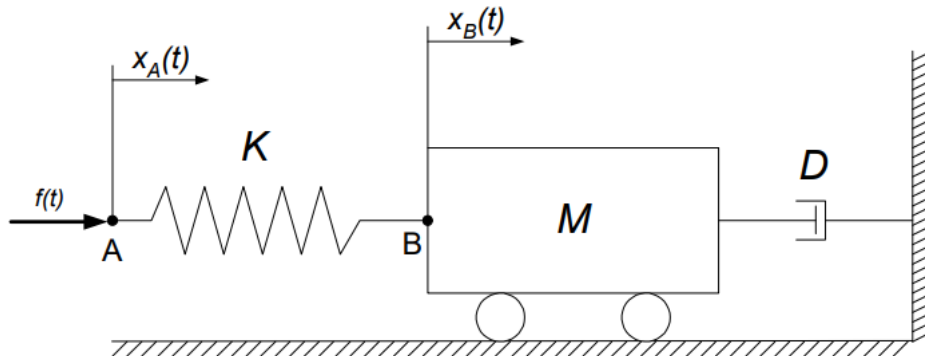
## Matematički model

Kako bi se sastavio matematički model, potrebno je prikazati vezu između ulaza i izlaza iz sustava. Kao i u svemu drugom pa tako i u sustavu, potrebna je pobuda odnosno ulaz da bi došlo do neke reakcije odnosno, u ovom slučaju, izlaz diferencijalne jednačbe su način na koji se postiže upravo to povezivanje. Prvenstveno je važno matematički prikazati vezu između ulaza (pobudu, uzrok) i izlaza (odziv, posljedicu) modeliranog sustava (pojam uzročnosti ili kauzalnosti – postojeće stanje sustava ovisi samo o njegovom prošlom stanju, ili drugačije rečeno, nema posljedica bez uzroka) (Petrić, 2012). Ako funkcije koje nisu poznate zavise o samo jednoj varijabli, tada se ta diferencijalna jednačba naziva običnom. U većini slučajeva ta je varijabla vrijeme. Ako te jednačbe imaju više varijabli koje nisu poznate i o kojima ovisi jednačba, tada govorimo o parcijalnim jednačbama. U tim slučajevima druga nepoznanica je većinom prostor. Integral diferencijalne jednačbe je poveznica između nepoznate funkcije i nezavisne varijable. Dakle, može se reći da dobiti matematički model nekog dinamičkog sustava, općenito znači napisati diferencijalnu jednačbu (ili više njih) tog sustava. Simulacija modela zahtijeva rješavanje te diferencijalne jednačbe. (Petrić, 2012)

S obzirom na prije prikazane obične zadatke u kojima su se rješavali jednostavni mehanički ili elektrotehnički problemi matematičkim modelom i računom, ovdje će se matematičkim modelima prikazati jednostavne tehničke sustave koji su učestali predmeti upravljanja ili su dijelovi sustava upravljanja. Prikazat će se matematički modeli mehaničkog i električnog te elektromehaničkog sustava.

## Mehanički sustav

Zadan je linearni mehanički sustav koji se pokorava trećem Newtonovom zakonu, zakonu akcije i reakcije koji govori kako svaka sila koja djeluje na neko tijelo ima silu koja joj se suprotstavlja. Za sustav će biti bitna tri elementa masa  $M$ , elastičnost  $K$ , i prigušenje  $D$ . Ovaj sustav u primjeni ima još dodatnih nelinearnih elemenata koji utječu na njega, ali koji će se radi jednostavnosti zanemariti.



Ako se po zakonu postave točke ravnoteže:

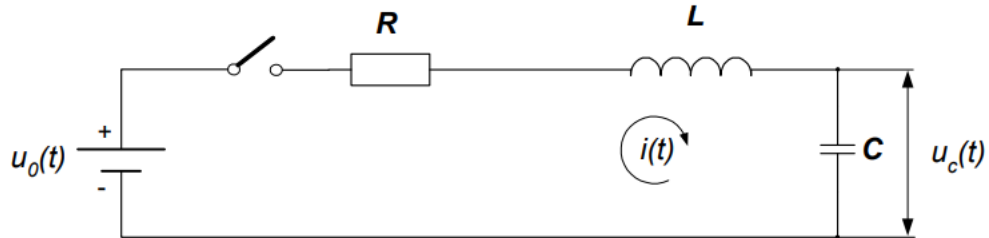
$$A: f = f_K = K(x_A - x_B)$$

$$B: f_K = f_M + f_D = M \frac{d^2 x_B}{dt^2} + D \frac{dx_B}{dt}$$

Simbol  $f$  označava vanjsku silu koja djeluje na sustav.  $f_K, f_M, f_D$  su sile unutar sustava u kojima  $f_K$  označava silu djelovanja opruge,  $f_M$  označava inerciju tijela,  $f_D$  označava silu prigušenja;  $x_A$  i  $x_B$  označavaju pomake u točkama A i B;  $K, M, D$  su konstanta krutosti opruge, masa, konstanta viskoznosti prigušenja. Ovaj sustav je sustav drugog reda gdje je masa spremnik kinetičke energije, a opruga je spremnik potencijalne energije. Nakon što su potaknuti silom  $f$  ili energijom unutar sustava, jedan oblik energije prelazi u drugi s gubitcima na prigušenju. Omjer između mase, elastičnosti i prigušenja daje oblik tog prijelaza. Ovime se postigao cilj matematičkog modela, a to je opis veze između pobuda i posljedica.

## Električni sustav

Zadani su serijski spojeni otpornik, zavojnica i kondenzator, odnosno RLC sustav. Ovaj je sustav usporediv s mehaničkim s obzirom na broj spremnika energije.



Pri rješavanju ovog sustava koristit će se Kirchoffovi zakoni, Ohmov zakon i Faradejev zakon. Uzima se u obzir da je početni naboj 0. Padove napona na otporniku  $u_R$ , na zavojnici  $u_L$ , i na kondenzatoru  $u_C$  dobiti će se iz sljedećih jednadžbi:

$$u_R = Ri$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow u_C = \frac{1}{C} \int_0^T i dt$$

U zadanim jednadžbama  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , predstavljaju otpor, induktivitet, i kapacitet;  $i$  predstavlja struju, a  $t$  je vrijeme. Kada je serijski spojen, RLC krug suma svih padova napona jednaka je naponu izvora.

$$u_R + u_L + u_C = u_0$$

Uvrštavanjem prijašnjih jednadžbi dobiva se:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^T i dt = u_0$$

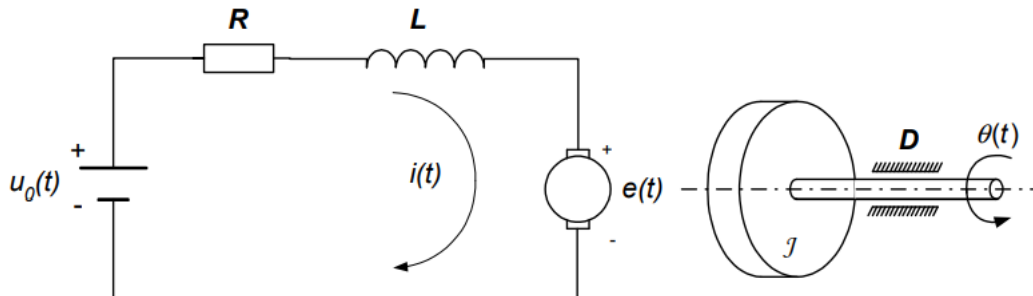
Sada primjenom izraza za struju u kondenzatoru se dobiva:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_0$$

Sličnost između spojeva je u spremnicima koji su zavojnica i kondenzator, te u reakcijama koje imaju elementi u električnom krugu. Ulogu inercije ima zavojnica koja se suprotstavlja promjeni struje. Dok pohranjuje energiju, odupire se porastu struje, a razgrađivanjem magnetskog polja opire se naglom padu struje. Kondenzator može postići gotovo dvostruko veći napon od izvora te tada razlika u naponu nastoji struju potjerati u suprotnom smjeru. Jedan dio energije troši se na zagrijavanje sustava. Ovim opisom veza u električnom sustavu postavio se njegov matematički model.

## Elektromehanički sustav

Mehanički sustav i električni sustav međusobno su povezani magnetskim poljima te čine bazu svakog elektromehaničkog sustava i dio su električnih motora i generatora. Ovdje je primjer elektromotora u kojem su povezani ovi sustavi.



Moment motora zadan je pomoću konstante motora  $K_m$  i struje  $i$ , a napon koji se suprotstavlja  $e$  nastao gibanjem u magnetskom polju, zadan je pomoću konstante generatora  $K_g$  i kutne brzine gibanja rotora  $\alpha$ .

$$T = K_m i$$

$$e = K_g \alpha$$

Uvrštavanjem u ove izraze Kirchoffove zakone i Newtonove zakone i s obzirom na to da su  $K_m$  i  $K_g$  jednaki i zapisani kao jedna konstanta  $K$  dobivaju se sljedeće jednačbe za istosmjerni elektromotor.

$$J\alpha + D\alpha = Ki$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_0 - K\alpha$$

$J$  predstavlja moment tromosti motora, a  $D$  je koeficijent viskoznosti trenja. Zbog jednostavnosti drugi su oblici trenja zanemareni.  $L$  predstavlja induktivitet u sustavu,  $R$  predstavlja otpor do je  $u_0$  napon izvora odnosno ulazna varijabla. Ovdje se upravlja pomakom i brzinom vrtnje. Ovaj posljednji matematički model, osim što opisuje elektromehanički sustav, također prikazuje kako se kako se dva sustava kao što su mehanički i električni skupa mogu povezati u jednu cjelinu kako bi se neki rad mogao lakše obaviti. Takvim povezivanjem i stvaranjem matematičkih modela, povezuje se sve čimbenike skupa u moguće automatsko upravljanje i time se

olakšava obavljanje rada. Također se pomoću upravo takvih matematičkih modela mogu predvidjeti moguće greške u sustavima i lakše se te greške mogu umanjiti ili u potpunosti eliminirati.

## Zaključak

Uzevši sve što je rečeno u obzir matematika se nalazi u svim dijelovima života. Bilo da se samo bavimo običnim kućnim računima ili nastojimo ostvariti veliki poslovni pothvat koristit će se brojevi i matematika na jedan ili drugi način. Za kućne račune možda će biti potrebna samo osnovna matematika koja uključuje 4 osnovne matematičke operacije; zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, dok će za ostvarivanje neko poslovnog pothvata biti potrebna matematika viših razina. Gledajući sa strane zadataka ili problema, mogu se uvidjeti dva osnovna načina na koje se matematički modeli mogu koristiti: rješavanje nastalih problema i predviđanje problema prije nego što nastane. Problemi koji mogu nastati u nekom proizvodnom sustavu su raznoliki. Tehnički i mehanički sustavi kao što imaju više sastavnica, tako imaju i više mogućih problema. Problemski zadatci su prikazani jednostavno kao zadatci s fiksnim varijablama i u savršenom sustavu koji nemaju gubitke. Takvi se zadatci koriste kako bi se lakše objasnile međuvisnosti između pojedinih elemenata u nekom sustavu. Takvi matematički modeli obično imaju rješenje koje je fiksno i prikazano brojem. S druge strane kod predviđanja mogućih problema potrebno je uzeti više varijabli koje utječu na sustav i iako je većina njih fiksna barem jedna varijabla je promjenjiva i u većini sustava to je vrijeme. Na neki način, i običan problemski zadatak može se koristiti za sprječavanje mogućih grešaka u nekom najjednostavnijem sustavu i ako na taj sustav promjene i vrijeme ne utječu. No, danas vrijeme je jako bitno, a sustavi su jako rijetko otporni na vanjske podražaje. Matematičkim modeliranjem, gdje je vrijeme jedna od nepoznatih varijabli najbolji je način na koji se može predvidjeti neki problemi koji se s vremenom mogu pojaviti u određenom sustavu. Današnji se ubrzani život vrti oko toga da proizvodnja odnosno određeni proces ne prestaje, već da je moguće proizvoditi odnosno obavljati proces konstantno kako bi se mogla ispuniti kvota potražnje. Iako se sada zalazi u svijet ekonomije, to se može objasniti i na jednostavnom primjeru automobila. Neka ga se prikaže kao sustav koji je primarno modeliran kao problemski zadatak i dobit će se automobil koji može vječno voziti s obzirom na to da su mu sve varijable fiksni brojevi. Automobil postaje savršeni stroj bez gubitaka ili „perpetuum mobile“. Sada kada se taj isti automobil modelira na način na koji vrijeme i vanjski čimbenici imaju utjecaj, taj automobil postaje onakav kakav se danas može pronaći na ulici; onaj koji troši gorivo, onaj kojem je s vremena na vrijeme potrebno promijeniti dijelove, itd.



Ovime se zapravo prikazuje glavna razlika između matematičkog modeliranja za problemske zadatke i matematičko modeliranja za dinamičke sustave i procese.

## Literatura

Gross, C. A., Roppel, T. A. (2012). *Fundamentals of Electrical Engineering*. Boca Raton: CRC Press.

Rossman Stroud, J., Dym, C. L. (2008). *Introduction to Engineering Mechanics: A continuum approach*. Boca Raton: CRC Press.

Rossman Stroud, J., Dym, C. L. (2015). *Introduction to Engineering Mechanics: A continuum approach. Second edition*. Boca Raton: CRC Press.

Petrić, J. (2012). *Automatska regulacija: Uvod u analizu i sintezu*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu.

Courant, R., Robbins, H. (1996). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. New York: Oxford University Press.

Slika 1: Brojevnici sustavi (2013) Dostupno na: <https://www.slideshare.net/Svijet/abeceda-racunala-brojevnici-sustavi> (15. 9. 2020.)

Slika 2: Osnovne računske operacije. Dostupno na: <https://brojevnici.blogspot.com/p/osnovne-aritmeticke-operacije-u.html> (17. 10. 2020)

Slika 3: Osnovni geometrijski likovi i tijela. Dostupno na: [https://www.artrea.com.hr/skola/memo\\_geometrija.pdf](https://www.artrea.com.hr/skola/memo_geometrija.pdf) (24. 01. 2021)

Slika 4: Prikaz pretvorbe binarnog sustava u dekadski. Dostupno na: <https://loomen.carnet.hr/mod/book/view.php?id=56414&chapterid=7747> (13. 2. 2021.)

Slika 5: Model atoma. Dostupno na: <https://www.stem.ba/hemija/tutorijali/item/68-struktura-tvari> (25. 2. 2021)

Slika 6: Kation i anion (2020) Dostupno na: <https://sciencenotes.org/cations-and-anions/> (16. 3. 2021.)

Slika 7: Prikaz utjecaja djelovanja predmeta na stol. Dostupno na: <https://www.pinterest.com/pin/405605510165271352/> ( 20. 3. 2021.)

Slika 8: 3D prikaz rasporeda sila u prostoru. Dostupno na: [https://hr.wikipedia.org/wiki/Kartezijev\\_koordinatni\\_sustav](https://hr.wikipedia.org/wiki/Kartezijev_koordinatni_sustav) (11. 4. 2021.)

Slika 9: Vrste nosača (2014) Dostupno na: [https://zoranpericsplit.weebly.com/uploads/1/2/4/9/12491619/24092014\\_strojarstvo.pdf](https://zoranpericsplit.weebly.com/uploads/1/2/4/9/12491619/24092014_strojarstvo.pdf) (24. 04. 2021.)

Slika 10: Graf prikazuje naprežanje nosača nakon što je na njega postavljen predmet () Dostupno na: <http://polj.uns.ac.rs/~mehanika/7%20gredni%20nosaci.pdf> (28. 4. 2021.)

Slika 11: Blok dijagram (2012) Preuzeto sa: Petrić, J. (2012). Automatska regulacija: Uvod u analizu i sintezu. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu. ( 2.5.2021.)

## Popis priloga

Slika 1: Brojevni sustavi.....	4
Slika 2: Osnovne računske operacije .....	7
Slika 3: Osnovni geometrijski likovi i tijela.....	9
Slika 4: Prikaz pretvorbe binarnog sustava u dekadski .....	14
Slika 5: Model atoma .....	18
Slika 6: Kation i anion .....	19
Slika 7: Prikaz utjecaja djelovanja predmeta na stol .....	32
Slika 8: 3D prikaz rasporeda sila u prostoru .....	33
Slika 9: Vrste nosača .....	36
Slika 10: Graf prikazuje naprezanje nosača nakon što je na njega postavljen predmet .....	37
Slika 11: Blok dijagram .....	44